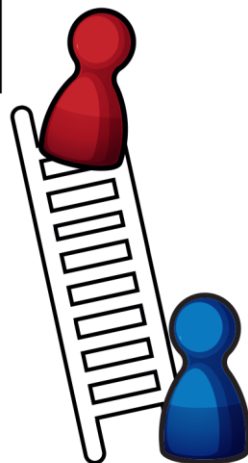


نردگین

همایش شب امتحان



ریاضی

دوازدهم

مهندس علی مقدم نیا

پاسخ تشریحی فصل ۱

سوال ۱: الف) نادرست ب) درست

ج) درست

سوال ۲:

الف)  $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq -1\} = [0, +\infty)$  (۰/۲۵)  
(۰/۵)

ب)  $f(g(x)) = \sqrt{x-1+1} = \sqrt{x}$  (۰/۲۵)  
(۰/۲۵)

سوال ۳:

$g(x) = 4x^2 + 4$  (۰/۲۵)  $f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1$   
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

صفحه: ۲۲

سوال ۴:

(۰/۲۵) (-۱, ۴)

سوال ۵:

$y = 2 \sqrt{x-3}$   
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

صفحه: ۱۵

سوال ۶:

(۰/۲۵) ۵

سوال ۷:

$$\underbrace{f(x) = (x+2)^2 - 1}_{(0/25)} \rightarrow \underbrace{y+1 = (x+2)^2}_{(0/25)} \xrightarrow{x \geq -2}$$

$$\underbrace{\sqrt{y+1} = x+2}_{(0/25)} \rightarrow \underbrace{f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2}_{(0/25)} \rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty) \quad (0/25)$$

صفحه: ۲۹

پاسخ تشریحی فصل ۲

سوال ۸:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

$$|a| = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \quad (0/25)$$

با توجه به نمودار تابع،  $ab$  باید عددی منفی شود بنابراین  $ab = -1$  (۰/۲۵)

سوال ۹:

$$2T = \frac{4\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 4\pi \quad (0/25) \rightarrow T = 2\pi \quad (0/25)$$

$$\rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \quad (0/25) \rightarrow b = \pm 1 \quad (0/25)$$

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \quad (0/25)$$

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \rightarrow a = -3 \quad (0/25)$$

سوال ۱۰: الف) نادرست

ب) نادرست

سوال ۱۱:

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

صفحه ۴۸

سوال ۱۲:

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0/5) \quad \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (0/5)$$

صفحه: ۴۷

سوال ۱۳:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

پاسخ تشریحی فصل ۳

سوال ۱۴:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{3(x-1)}^{(0/25)}}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

به روش‌های هم‌ارزی و هوییتال نمره تعلق نمی‌گیرد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 3 \quad (0/25)$$

(0/25)

سوال ۱۵:

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad (0/25)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (0/25)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad (0/25)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad (0/25)$

صفحه: ۶۴

سوال ۱۶:

خیر (0/25) زیرا  $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$  در همسایگی راست  $x=1$  تعریف نشده است. (0/25)

سوال ۱۷:

$$\frac{2}{0^+} = +\infty \quad (0/25)$$

(0/25)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (0/25)$$

(0/25)

سوال ۱۸:

(ب)  $(\infty/25) + \infty$

(الف)  $3 - (\infty/25)$

سوال ۱۹:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5} \quad (0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^3} = +\infty \quad (0/25)$$

(0/25)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2-\frac{1}{2}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3 - x^2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = 0 \quad (0/5)$$

پاسخ تشریحی فصل ۴

سوال ۲۰:

(ب) C  $(\infty/25)$  صفحه: ۷۶

(الف) A  $(\infty/25)$

سوال ۲۱:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(0/25)                      (0/25)                      (0/25)                      (0/25)

صفحه: ۸۴

سوال ۲۲:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x-2}}_{\circ/۲۵} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{g(x)}_{\circ/۲۵} \underbrace{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}}_{\circ/۲۵}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \Delta f'(2) \quad (\circ/۲۵)$$

سوال ۲۳:

الف)  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+4) + 3x^2 \underbrace{(\sqrt{3x+2})}_{\circ/۲۵} \quad (\circ/۲۵)$

ب)  $g'(x) = \frac{\underbrace{(-14x)(x-6)}_{\circ/۲۵} - \underbrace{(1)(-7x^2+1)}_{\circ/۲۵}}{\underbrace{(x-6)^2}_{\circ/۲۵}} \quad (\circ/۲۵)$

ب)  $h'(x) = \underbrace{4(2x^5-1)^3}_{\circ/۲۵} \underbrace{(10x^4)}_{\circ/۲۵}$

سوال ۲۴:

الف)  $g'(x) = \frac{\underbrace{4}_{\circ/۲۵} \times \underbrace{2}_{\circ/۲۵} \times \underbrace{(2x-1)^3}_{\circ/۲۵} \underbrace{(x^3+8)}_{\circ/۲۵} - \underbrace{3x^2}_{\circ/۲۵} \underbrace{(2x-1)^4}_{\circ/۲۵}}{\underbrace{(x^3+8)^2}_{\circ/۲۵}}$

ب)  $f'(x) = \frac{2 \underbrace{(\circ/۲۵)}}{3 \underbrace{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}_{\circ/۲۵}} \quad (\circ/۲۵)$

صفحه: ۹۲

سوال ۲۵:

-۶

سوال ۲۶:

$$\underbrace{f'(x) = 4x + 5}_{0/25} \Rightarrow f'(2) = 13 \quad (0/25)$$

$$\frac{\underbrace{f(0) - f(-2)}_{0/25}}{\underbrace{0 - (-2)}_{0/25}} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1 \quad (0/25)$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه  $x=2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[-2, 0]$  است. (۰/۲۵)

سوال ۲۷:

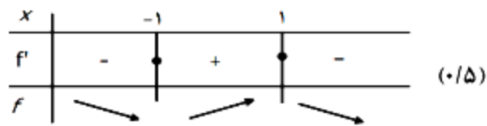
$$f'(t) = 2t + 2 \quad (0/25)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4 \quad (0/25) \quad \underbrace{2t + 2 = 4}_{(0/25)} \rightarrow t = 1 \quad (0/25)$$

صفحه: ۱۰۰

سوال ۲۸:

$$\underbrace{f'(x) = -6x^2 + 6 = 0}_{0/25} \Rightarrow x = \pm 1 \quad (0/5)$$



پس تابع در بازه  $[-1, 1]$  صعودی اکید است. (۰/۲۵)

سوال ۲۹:

$$f'(2) = 0 \quad (0/25) \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \quad (0/25) \quad b = -3 \quad (0/25)$$

$$f(2) = 1 \quad (0/25) \rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \quad (0/25) \quad d = 5 \quad (0/25)$$

سوال ۳۰:

$$\underbrace{f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0}_{(0/25)} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \quad (0/25) \\ x = 2 \quad (0/25) \end{cases}$$



$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'$		-	+	-
$f$		$-16$	$11$	
		Min	Max	
		(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	

جدول (۰/۵)

سوال ۳۱:

الف) نادرست (۰/۲۵)      ب) درست (۰/۲۵)

سوال ۳۲:

$$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y \quad (۰/۲۵)$$

$$s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y \quad (۰/۲۵)$$

$$s' = 2y + 8 = 0 \quad (۰/۲۵) \quad \begin{cases} y = -4 \quad (۰/۲۵) \\ x = 4 \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

سوال ۳۳:

$$\underbrace{2h + 2r + \pi r = 6}_{۰/۲۵} \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$S(r) = 6r - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \quad (۰/۲۵)$$

$$6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi} \quad (۰/۲۵)$$

$r$	$\frac{6}{4 + \pi}$
$S'$	-      +
$S$	

(۰/۵)

$$h = \frac{6 - (2 + \pi) \frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi} \quad (۰/۲۵)$$

سوال ۳۴:

الف) دایره      ب) استوانه      ج) موازی - عبور نمی کند

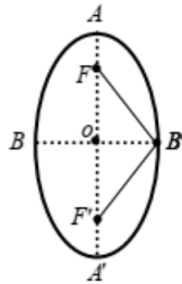
سوال ۳۵:

الف)  $FF' = 4$  (۰/۲۵) ,  $O(1,3)$  (۰/۲۵)

ب)  $y = 3$  (۰/۲۵)

پ)  $OB' = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{5}$  (۰/۲۵)

$S = \frac{1}{2} OB' \times FF' = 2\sqrt{5}$  (۰/۲۵)



سوال ۳۶:

$2a = 8 \rightarrow a = 4$ ,  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow c = 2 \rightarrow FF' = 2c = 4$   
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

صفحه: ۱۳۲

سوال ۳۷:

$e = \frac{2}{3}$  ,  $2a = 12 \rightarrow a = 6 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} = \frac{c}{6} \rightarrow c = 4$  (۰/۵)

$2b = ?$  ,  $2c = ?$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 2b = 4\sqrt{5} \rightarrow 36 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5}$  (۰/۵)

$2x = 8$

سوال ۳۸:

$O(2,-2)$ ,  $r = 2$ ,  $d = \frac{|3 \times 2 + 4(-2)|}{\sqrt{9+16}} = \frac{2}{5}$   
(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط می باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند. (۰/۲۵)

سوال ۳۹:

$$A \text{ دایره } : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 9 = 0 \rightarrow O_A = (-1, 2), R_A = \sqrt{14} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$B \text{ دایره } : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \rightarrow O_B = (+1, -2), R_B = 3 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$O_A O_B = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$|R_A - R_B| < 2\sqrt{5} < R_A + R_B \rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند. (۰/۲۵)}$$

سوال ۴۰:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 : \underbrace{O(-1, 2), r = 2}_{(۰/۲۵)} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 : \underbrace{O'(2, -1), r' = m}_{(۰/۲۵)} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$OO' = 3\sqrt{2} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{OO' = r + r'}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2 \text{ (۰/۲۵)}$$

سوال ۴۱:

{ب}

الف) مستقل

سوال ۴۲:

$$\text{الف) } P(A) = \frac{3}{4} \text{ (۰/۲۵)}, P(B) = \frac{1}{4} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\text{ب) } P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|A)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{3}{10} \text{ (۱/۲۵)}$$

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

سوال ۴۳:

$$P(A) = \underbrace{P(B)P(A|B)}_{(0/25)} + \underbrace{P(C)P(A|C)}_{(1)} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{17}{24}$$

به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.

صفحه ۱۴۶

سوال ۴۴:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \quad (0/5)$$

$$P(A) = \underbrace{\frac{6}{10} \times \frac{6}{13}}_{(0/5)} + \underbrace{\frac{4}{10} \times \frac{5}{13}}_{(0/5)} = \frac{56}{130} \quad (0/5)$$

حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.

صفحه: ۱۴۸