دهمی

یازدهمی

با ❤ بیا تام‌لند

جزوه

دوره سالانه ۱۴۰۴

هندسه دوازدهم

استاد حمید ناصر

ماتریس

ماتریس $A_{m\times n}$: جدولی مستطیلی شکل با m سطر و n ستون که روی آن اعدادی به نام درایه قرار دارند. برای مثال $A_{۴\times ۲}$ یعنی ماتریسی (جدولی) که ۴ سطر و ۲ ستون دارد. تعداد سطرها و ستون های یک ماتریس مرتبه نام دارد.

درایه a_{ij}: عددی که واقع بر سطر i و ستون j ماتریس A قرار دارد، درایه a_{ij} است.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad a_{۳۲}=۱ \quad a_{۳۱}=۰ \quad a_{۲۱}=۳ \quad a_{۱۲}=-۱$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & x \end{bmatrix} \quad b_{۲۱}=-۱ \quad b_{۱۲}=۰$$

مثال۱: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} ۴ & i>j \\ i+j & i<j \\ i^۲ & i=j \end{cases}$ کدام است؟

نکته جاهای معروف ماتریس مربعی

قطر اصلی : $i=j$

بالای قطر اصلی : $i<j$

قطر فرعی : $i+j=\underbrace{n}_{\text{مرتبه}}+۱$

پایین قطر اصلی : $i>j$

معرفی چند ماتریس:

◉ **ماتریس مربعی** : ماتریسی با تعداد سطرها و ستون های برابر.

◉ **ماتریس بالا مثلثی**: $\begin{bmatrix} a & & \\ ۰ & b & \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ پایین قطر، تمام درایه ها صفرند.

◉ **ماتریس پایین مثلثی**: $\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ & b & ۰ \\ & & c \end{bmatrix}$ بالای قطر، تمام درایه ها صفرند.

◉ **ماتریس قطری (بالا و پایین مثلثی)**: $\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ بالا و پایین قطر درایه ها صفرند.

◉**ماتریس قائم:** $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ سطرها بیشتر از ستون ها.

◉**ماتریس افقی:** $[\quad\quad]$ ستون ها بیشتر از سطرها.

◉**ماتریس اسکالر:** قطری می باشد که تمام درایه های روی قطر برابرند. $(kI)=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$

(*با تمام مربعی ها تعویض پذیر است.)

◉**ماتریس سطری:** فقط یک سطر دارد.

◉**ماتریس ستونی:** فقط یک ستون دارد.

عملیات روی ماتریس:

◉**تساوی دو ماتریس:** دو ماتریس هم مرتبه که تمام درایه های نظیر یکسان باشند.

◉**ضرب عدد در ماتریس:** تمام درایه ها، k برابر می شوند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۶ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ -۴ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$$

◉**جمع و تفاضل دو ماتریس:** شرط لازم برای جمع دو ماتریس، هم مرتبه بودن است که تمام درایه های نظیر جمع یا تفاضل می شوند.

◉**ویژگی های جمع و تفاضل دو ماتریس :**

۱) $A+B=B+A$ ۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$

۳) $A - B = -(B - A)$

۴) $k(A \pm B) = kA \pm kB \quad \rightarrow \quad Ex: ۴(A \pm B) = ۴A \pm ۴B$

۵) $r(kA) = (rk)A = k(rA) \quad \rightarrow \quad Ex: ۳(۲A) = ۶A = ۲(۳A)$

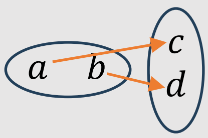
۶) $(r + k)A = rA + kA \quad \rightarrow \quad Ex: (۳ + ۲)A = ۳A + ۲A$

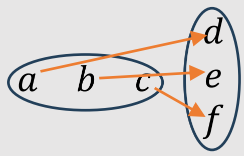
۷) $A - A = \bar{o} \quad \rightarrow$ ماتریس صفر

◉ **ضرب دو ماتریس**: برای تعریف ضرب باید تعداد ستون اولی و سطر دومی برابر باشد و مرتبه، حاصل ضرب سطر اولی در ستون دومی است.

$A_{۴\times۳}\, B_{۳\times۲} = C_{۴\times۲}$ $\qquad$ $\Delta_{m\times n}\, \blacksquare_{n\times p} = o_{m\times p}$

◉ **اصل محاسبه ضرب دو ماتریس**: ضرب الزاماً بین دو ماتریس است. برای محاسبه درایه سطر i و ستون j ماتریس حاصل ضرب، ....!





$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & -۱ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -۱ \\ c & d & e \\ -۵ & ۵ & f \end{bmatrix}$$

مثال ۲: تمام مقادیر مجهول را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال۳: تمام درایه های جواب که مجموع شماره سطر و شماره ستون آنها فرد باشد، کدامند؟

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

مثال۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشند، درایه سطر دوم ستون اول $ABCD$ چیست؟

مثال۵: اگر $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، درایه ستون سوم ABC چیست؟

مثال۶: مقدار $\frac{x}{y}$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال۷: مقدار b و a را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}$$

مثال۸: مقدار x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

مثال۹ : فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

حفظ نکن، مغزت کار بنداز، خودت بگو!

حالات AB و BA :

۱) $\begin{cases} A_{m\times n} \\ B_{p\times q} \end{cases} \rightarrow$ AB : تعریف نمی شود — BA : تعریف نمی شود

۲) $\begin{cases} A_{m\times n} \\ B_{n\times p} \end{cases} \rightarrow$ AB : تعریف می شود — BA : تعریف نمی شود

۳) $\begin{cases} A_{m\times n} \\ B_{n\times m} \end{cases} \rightarrow$ AB : $\mathrm{m}\times\mathrm{m}$ تعریف می شود با مرتبه — BA : $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ تعریف می شود با مرتبه

می گن AB و BA قابل تعریف ولی غیرقابل مقایسه (غیرهم مرتبه) !

۴) $\begin{cases} A_{n\times n} \\ B_{n\times n} \end{cases} \rightarrow$ AB : $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ تعریف می شود با مرتبه — BA : $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ تعریف می شود با مرتبه

می گن AB و BA قابل تعریف ولی قابل مقایسه (هم مرتبه) !

ولی اکثرا $AB \neq BA$!

مثال۱۰ : درست و نادرست را معلوم کنید.

۱) اگر $A + B$ تعریف شود، AB یا BA تعریف می شوند.

۲) اگر AB تعریف شود، $A + B$ تعریف می شود.

۳) اگر AB تعریف شود، BA تعریف می شود.

۴) اگر AB و BA تعریف شوند، ممکن است، $AB + BA$ تعریف نشود.

۵) اگر A و B هردو مربعی باشند، AB و BA و $AB + BA$ تعریف می شوند.

ویژگی های ضرب ماتریس:

۱) $mA(nB)=(nA)mB=(mn)AB \to ۲A(۳B)=۳A(۲B)=۶AB$

۲) $B=\bar{O}$ یا $A=\bar{O}$ $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $AB=\bar{O}$

۳) $B=C$ $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $AB=AC$

۴) $\begin{matrix} tr(AB)=tr(BA) \\ |AB|=|BA| \end{matrix} \to \begin{matrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix} \end{matrix}$

۵) $AB\neq BA$ (در اکثر حالات)

اگر ضرب دو ماتریس خاصیت جابه جایی داشته باشد، تعویض پذیر نام دارند. $AB=BA$

	حالت عام	حالت خاص: A و B تعویض پذیر $AB=BA$
ABC	$A(BC)=(AB)C$	$(BA)C=(AB)C$
$(۲A+B)(۳A-۲B)$	$۶A^۲-۴AB+۳BA+۲B^۲$	$۶A^۲-AB-۲B^۲$
$(A+B)^۲$	$A^۲+AB+BA+B^۲$	$A^۲+۲AB+B^۲$
$(A+B)(A-B)$	$A^۲-AB+BA-B^۲$	$A^۲-B^۲$
$(AB)^۳$	$(AB)(AB)(AB)$	$A^۳B^۳=B^۳A^۳=A^۳B^۳$

مثال۱۱: اگر $AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، کدام می تواند BA باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$

تام لند (سرزمین تام)

مثال۱۲: اگر $A = \begin{bmatrix} x & ۱ \\ ۰ & y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ x & -۲ \end{bmatrix}$ باشند و $(A-B)^۲ = A^۲ + B^۲ - ۲AB$ باشد، $x+y$ چیست؟

ماتریس واحد (همانی)

ماتریس واحد (همانی): ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی ۱ هستند.

این ماتریس نقش ۱ را در اعداد بازی می کند.

$I_{۱\times۱} = [۱]$ $\quad I_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $\quad I_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

ویژگی ها:

۱) $AI = IA = A \rightarrow$ (I با تمام ماتریس ها تعویض پذیر است)

۲) $I^k = I$ $\quad$ ۳) $\begin{cases} (-I)^{۲k} = I \\ (-I)^{۲k+۱} = -I \end{cases}$ $\quad$ ۴) $A^o = I$

نکته ماتریس اسکالر (kI) با هر ماتریس تعویض پذیر است.

نکته I با تمام ماتریس ها (مربعی) اتحاد می سازد. (چرا؟)

$(A+I)^۲ = A^۲ + AI + IA + I^۲ = A^۲ + ۲AI + I^۲$

$(A+I)(A-I) = A^۲ - I^۲$

نکته اگر دو ماتریس تعویض پذیر باشند، مشتقاتشان هم تعویض پذیر است. از این رو ترکیبات I با هر ماتریس تعویض پذیر است.

$AB = BA \Leftrightarrow (۲A - B)(A + ۳B) = (A + ۳B)(۲A - B)$

$AI = IA \Leftrightarrow (A^۲ + I)(۲A - I) = (۲A - I)(A^۲ + I)$

تام لند (سرزمین تام)

توان در ماتریس :

شرط به توان رسیدن، مربعی بودن است و محاسبه آن مانند ضرب است.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&1&2\\-2&1&-3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&&-2\\&0&\\5&&\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\4&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&\\&-3\end{bmatrix}$$

● ویژگی های توان :

۱) $(kA)^n=k^nA^n$ $\qquad Ex:(2A)^4=16A^4$

۲) $\underbrace{A^n=A^{n-1}\times A=A\times A^{n-1}}_{Ex:\,A^7=A^4\times A^3=A^3\times A^4}\rightarrow \Delta\blacksquare=\blacksquare\Delta$! توان یکی از حالات تعویض پذیری است

مثال۱۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\end{bmatrix}$ باشد، به صورتی که $A^2=\alpha A+\beta I$ باشد، $\alpha+\beta$ را بیابید.

مثال۱۴: $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\3&2&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times3}$ با تعریف $b_{ij}=\begin{cases}3 & i\geq j\\ i-j & i<j\end{cases}$ هستند، درایه سطر سوم ستون اول A^2B^2 چیست؟

مثال۱۵: $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&1&2\\-2&0&3\end{bmatrix}$ است، درایه ستون سوم ماتریس A^3 چیست؟

مثال۱۶: $A=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&1&4\\2&-1&3\end{bmatrix}$ است، سطر سوم ماتریس A^4 چیست؟