



با  بیا تام لند

دوره سالانه ۱۴۰۴

آمار و احتمال یازدهم

استاد مجید علایی نسب





دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

منطق ریاضی

دستور زبان ریاضی، یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.

منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. منطق ریاضی

از دو بخش گزاره و استدلال تشکیل شده است.



گزاره

به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد، گزاره گفته می‌شود.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.

از این به بعد درستی یا نادرستی گزاره را به صورت T یا F نشان می‌دهیم.



خواص گزاره

- ۱ جمله است.
- ۲ جمله خبری است.
- ۳ دارای ارزش درستی یا نادرستی است.
- ۴ فقط دارای یک ارزش است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند.



جدول ارزش گزاره

هر گزاره یکی از دو حالت ارزش درست یا نادرست را دارد. پس ارزش گزاره p به صورت جدول زیر مشخص می شود.

 p

د

ن



برای ۲ گزاره p و q در جدول ارزش گزاره‌ها، چهار حالت وجود دارد.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

توجه داشته باشید که n گزاره باهم 2^n حالت ارزشی خواهند داشت.



حدس بازی مسئله باز

گزاره‌ای است که نمی‌توانیم آن را اثبات کنیم و نمی‌توانیم برای رد آن مثال نقض بیاوریم.

مسئله طرح : هر عدد صحیح زوج بزرگتر از ۲، را می‌توانیم به صورت مجموع دو عدد اول بنویسیم.

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$8 = 3 + 5$

$10 = 5 + 5$

$12 = 5 + 7$

$14 = 3 + 11$



P, q ارزش بیان دارند.

دو گزاره هم‌ارز

دو گزاره هم‌ارزش را معادل یا هم‌ارز می‌گویند. دو گزاره هم‌ارز P و q را به صورت $P \equiv q$ نشان می‌دهند.

اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز باشند ارزش بی‌معوم باشد ارزش دیگر بی‌معوم است.



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

گزاره‌نما

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما نام دارد.

نادم از



۶ عدد است فرد $\equiv F$

۲۷ عددی است فرد $\equiv T$
 $(7x + y = 15) \equiv T$
 $(7x + y = 15) \equiv T$

هر یک از عبارتهای زیر یک گزارهها می باشد -

$x = 6$

$x = 27$

$x = 2, y = 11$
 $x = -1, y = 22$

x عددی فرد است.

۱

$7x + y = 15$

۲

$x + y = z$

۳

$2x + 4 < 11$

۴

$2x < 7$

$(2x < 7) \equiv F$

$x = 10$

$(2x < 7) \equiv T$

$x = 1$

۱۱ عدد است زوج
دست بزرگتر از ۱

۱۲
صالح و فرد هر ۱۲

$(x + y = z) \equiv T : z = 6, x = 4, y = 2$

$(x + y = z) \equiv F : z = 9, x = 4, y = -1$



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

تمامی معادلات و نامعادلات گزاره‌نما می‌باشند.

تذکر مهم

گزاره‌نما را بر حسب تعداد متغیر، یک متغیره $p(x)$ ، دو متغیره $p(x, y)$ و ... می‌نامیم.

توجه



دامنه متغیر گزاره نما

مجموعه‌ای است که اگر هر عضو آن جانشین متغیر گزاره‌نما شود گزاره‌نما را به گزاره تبدیل می‌کند و آن را با D نشان می‌دهند.

مجموعه جواب گزاره‌نما:

$$D: \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\frac{x+2}{x} = 9$$

$$x+2 = 9x \rightarrow 2 = 8x \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\left\{ \frac{1}{4} \right\}$$



در هر حالت دامنه متغیر گزاره‌نمای داده شده را مشخص کنید.

مثال ۱

$$1 \quad \frac{6x+7}{3x^2-12} = 5$$

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \cancel{3x^2} = \cancel{12}^4 \longrightarrow x = \pm 2$$

$$D = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$



در هر حالت دامنه متغیر گزاره‌نمای داده شده را مشخص کنید.

مثال ۱

$$2 \quad 3 = \frac{2x+1}{\sqrt{x-4}} > 0$$

$$x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$D: (4, +\infty)$$

$$9 = \sqrt{x-4} \geq 0$$

$$x \geq 4$$

$$D: [4, +\infty)$$



مجموعه جواب گزاره‌نما

زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر است که اگر هر عضو آن جانشین متغیر گزاره‌نما شود، گزاره‌نما را به گزاره‌های

درست تبدیل می‌کند و آن را معمولا با S نشان می‌دهند.

$$x^2 - 7 = 9$$
$$D = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x^2 = 7 + 9 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow S = \{4, -4\}$$



انواع گزاره (گزاره ساده)

گزاره‌ای است که از یک جمله خبری ساده تشکیل شده باشد.

۷ عددی اول است.

۱۲ بر ۳ بخش پذیر است.



۱۴ عدد زوج و ۲ گانه

گزاره مرکب

گزاره‌ای است که از ترکیب ۲ یا چند گزاره ساده تشکیل می‌شود.

۳ عددی است اول و زوج

۱۱ عددی فرد و اول است.

۲ عددی اول و زوج است.

اگر ۱۲ عددی زوج باشد، آن گاه مضرب ۴ است.

$$x^2 + y^4 = 0 \quad : \quad x^2 = 0$$

$$y^4 = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{y-1}) + x^3 - 1 = 0$$



گزاره شخصی

گزاره‌ای است که دربارهٔ شیء یا شخص خاصی خبر می‌دهد.

حافظ شاعر است.

شیخ بهایی فیلسوف است.

۴ عددی زوج است.

گزاره‌ای است در حد
 $P \equiv T$

گزاره‌ای است نامدر
 $P \equiv F$



گزاره کلی

گزاره‌ای است که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه معین نسبت می‌دهد.

همهٔ اعداد زوج بر ۲ بخش پذیرند.

همهٔ اعداد اول فردند.

هر عدد فردی اول است.



گزاره جزئی

گزاره‌ای است که خاصیتی را به بعضی از اعضای یک مجموعه معین نسبت می‌دهد.

بعضی اعداد زوج بر ۴ بخش پذیرند.

بعضی اعداد اول فردند.

بعضی اعداد فرد مضرب ۵ می‌باشند.



P : ۵ عدد است زوج : $P \equiv F$

$\sim P$: ۵ عددی است فرد : $\sim P \equiv T$

◆ نقیض يك گزاره

نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می دهند و می خوانیم:
چنین نیست که p

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

با استفاده از جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p) \equiv p$
د	ن	د
ن	د	ن



ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » که به صورت « $p \vee q$ » نشان می‌دهند را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. به رابط منطقی \vee ، فاصل گفته می‌شود. $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است:



ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p و q» را که به صورت « $p \wedge q$ » نشان می‌دهند، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. به رابط

منطقی « \wedge » عاطف گفته می‌شود:

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت زیر است:



جدول‌های زیر را کامل کنید.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

جدول ارزش تعدادی گزاره ۳۲ حالت دارد. در چه تعداد از حالات ارزش فقط دوتای **تست ۲**

آنها نادرست است؟

۱۰ **۲**

۵ **۱**

۱۶ **۴**

۸ **۳**



تست ۳ اگر $(\sim p \wedge r)$ درست و $(r \wedge q)$ نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره‌های $p \vee (r \wedge q)$ و

$(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱ درست - نادرست ۲ درست - درست

۳ نادرست - درست ۴ نادرست - نادرست



تست ۴ اگر p گزاره نادرست و ارزش گزاره مرکب $(p \vee q \vee r)$ درست باشد، آنگاه برای q و r چند

حالت امکان پذیر است؟

۳ ۲

۶ ۱

۸ ۴

۴ ۳



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

توجه گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های « p شرط کافی برای q است» و « q شرط لازم برای p است»

می‌خوانیم یعنی p مستقیماً q را نتیجه می‌دهد و q شرط لازم برای برقراری p است.



جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

**توجه**

هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند: ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.



مثال ۵ جدول های زیر را کامل کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		



مثال ۵ جدول های زیر را کامل کنید.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \wedge q \Rightarrow q$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

مثال ۶ ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 فرد باشد، آن گاه a عددی فرد است.



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

اگر a^2 عددی گنگ باشد، ثابت کنید a نیز عددی گنگ است.

مثال ۷



ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »



تمرین جدول های زیر را کامل کنید:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			



با توجه به این که $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ جدول ارزش گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د



چند خاصیت مهم

$$① \begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$$

$$② \begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \end{cases}$$



تست ۸ اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow p)$ ، برابر ارزش کدام است؟

- ۱ r همیشه درست
- ۲ همیشه نادرست
- ۳ $\sim r$ همیشه درست
- ۴ همیشه نادرست



تست ۹ گزاره $p \Rightarrow (\sim p \Leftrightarrow (q \vee r))$ ارزشی نادرست دارد. با کدام احتمال ارزش گزاره $r \Rightarrow q$ درست است؟

$$\frac{2}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

$$1 \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{۳}$$



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

تست ۱۰ کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟

۱ $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

۲ $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

۳ $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

۴ $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

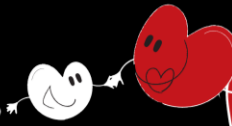
تست ۱۱ اگر ارزش گزاره $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow r]$ درست باشد، ارزش گزاره $\sim q \wedge [p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)]$ کدام است؟

T ۲

F ۱

هم‌ارز با $\sim r$ ۴

هم‌ارز با p ۳



تست ۱۲ ارزش کدام گزینه نا درست است؟

۱ $(5^2 - 1)$ زوج است، اگر و فقط اگر ۱۲۱ مربع کامل باشد.

۲ $-\sqrt{39} > -5 \Leftrightarrow (2^4 = 16)$

۳ اول بودن عدد ۱۸ شرط لازم و کافی است برای گویا بودن عدد $\sqrt{7}$.

۴ اگر $\sqrt{23}$ گنگ باشد، آن گاه ۱۹ عدد فرد است و برعکس.

مدرسه‌ای برای همه

تأمینند

