



مؤلف : مهندس حمید ناصر

مبحث : دائره پایه

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۲

دایره

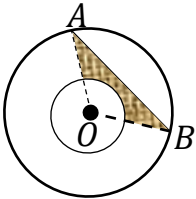
تعریف دایره: نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت اند، نقطه ثابت مرکز و فاصله ثابت شعاع اند.

روش معاسبه طول کمان α درجه:

روش معاسبه مساحت قطاع α درجه:

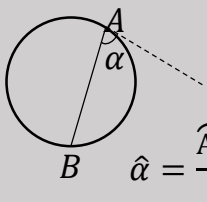
مثال ۱: طول کمان 30° از دایره ای به مساحت 36π بیشتر است یا طول کمان 60° از دایره ای به شعاع ۳ واحد؟

مثال ۲: در شکل مقابل طول کمان AB برابر با $\frac{\pi}{3}$ و شعاع دایره کوچک ۱ اند. اگر زاویه $\hat{O} = 120^\circ$ باشد،

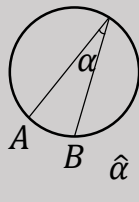


مساحت هاشور چیست؟

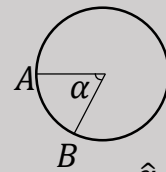
زاویه در دایره



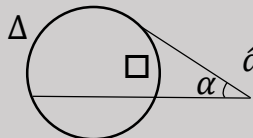
① مرکزی: $\hat{\alpha} = \widehat{AB}$



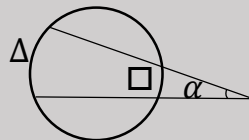
② محاطی: $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB}}{2}$



③ ظلی: $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

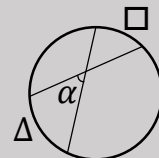


④ زاویه بین امتداد دو وتر: $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{\Delta} - \widehat{\square}}{2}$

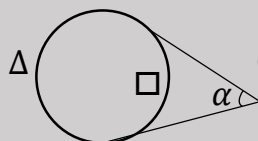


⑤ زاویه بین دو وتر:

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{\Delta} - \widehat{\square}}{2}$$



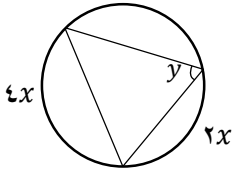
⑥ زاویه بین دو وتر: $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{\Delta} + \widehat{\square}}{2}$



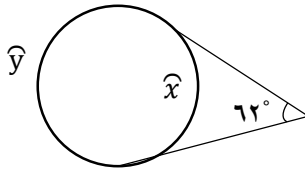
⑦ زاویه بین دو وتر: $\hat{\alpha} = \frac{\widehat{\Delta} - \widehat{\square}}{2}$

مثال ۳: هر بار مقدار مجهول را بیابید.

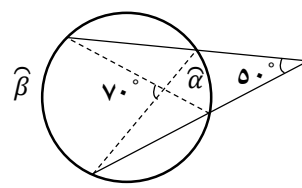
؟ = \widehat{x}, \widehat{y} (4) $2x$



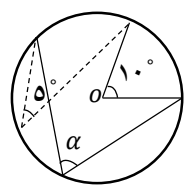
؟ = \widehat{y}, \widehat{x} (3)



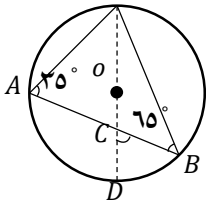
؟ = $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ (2)



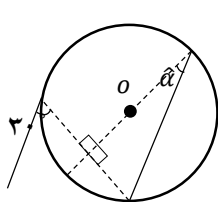
؟ = $\widehat{\alpha}$ (1)



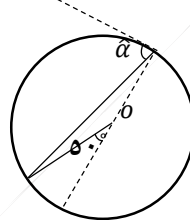
؟ = \widehat{C} (8)



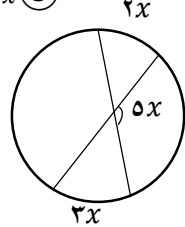
؟ = $\widehat{\alpha}$ (7)



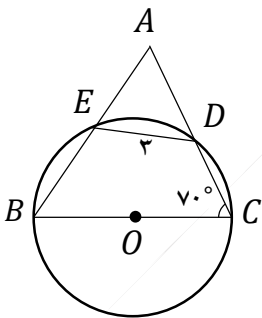
؟ = $\widehat{\alpha}$ (6)



؟ = \widehat{x} (5)

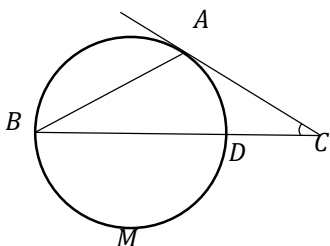


مثال ۴: در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان \widehat{EDC} است؟

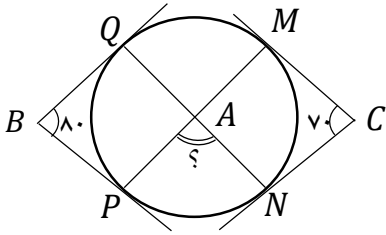


- ۱۲۰ (۴) ۱۰۰ (۳) ۹۰ (۲) ۸۰ (۱)

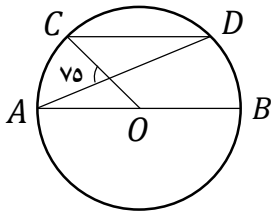
مثال ۵: در شکل مقابل مماس AC برابر وتر AB است. کمان $\widehat{DMB} = 222^\circ$ است. \widehat{C} چیست؟



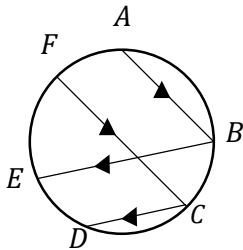
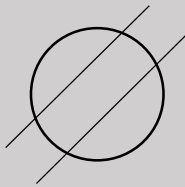
مثال ۶: در شکل اضلاع زاویه های C و B بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟



مثال ۷: در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید؟



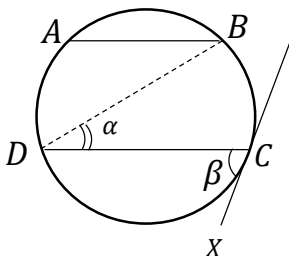
نکته کویپولو: دو وتر موازی، کمان های مساوی پیدامی کنند و بالعکس.



Ex_۸: $\widehat{EF} = 110^\circ$ ، $\widehat{CD} = 40^\circ$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{FCD} = ?$

مثال ۸: در شکل روبه رو وتر AB ، برابر شعاع دایره است و $AB \parallel CD$ ، زاویه $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر

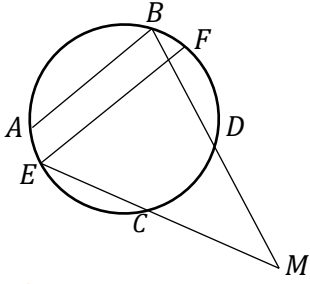
دایره است. کمان BC چند درجه است؟



- ۷۵ (۲) ۷۰ (۱) ۶۰ (۲) ۵۰ (۱)

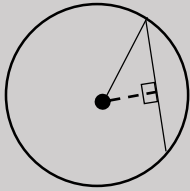
مثال ۹: در شکل زیر، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر

زوايه $B\hat{M}E = 20^\circ$ باشد، اندازه زاويه $A\hat{B}D$ چند درجه است؟

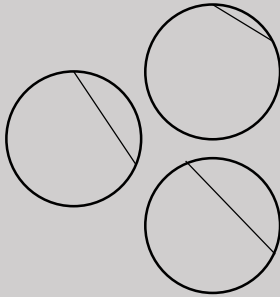


۲ طول پاره خط در دایره

الف) فیثاغورث:

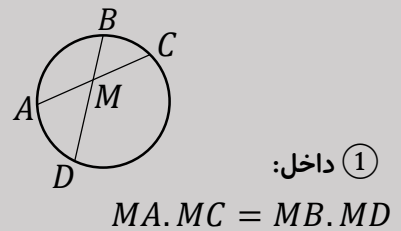
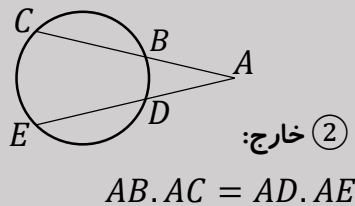
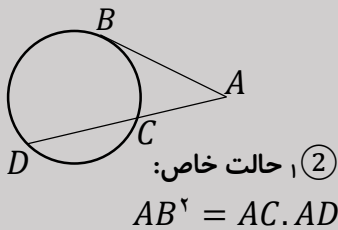


تذکره: شعاع عمود بر وتر = شعاع منصف وتر = شعاع منصف کمان



تذکره: } وتر به طول --- نظیر کمان --- است.
 وتر به طول --- نظیر کمان --- است.
 وتر به طول --- نظیر کمان --- است.

ب) روابط طولی تشابهی:



تذکره: کمترین و بیشترین فاصله تا دایره: $min: |R - OA|$, $max: R + OA$

تذکره: بلا داشتن کمترین و بیشترین فاصله، قطر را داریم.

مثال ۱۰: وتر به طول ۴ در دایره ای به مساحت 25π ، چه فاصله ای تا مرکز دایره دارد؟

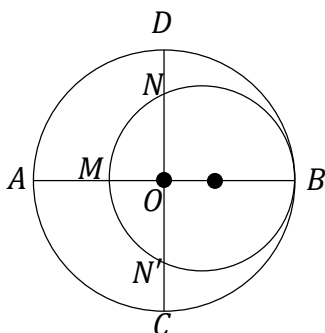
مثال ۱۱: مرکز دایره ای به شعاع $\frac{5}{3}$ ، راس مربعی به ضلع ۲ واحد است. نزدیک ترین راس مربع تا نقطه تماس چه فاصله ای دارد؟

- ۰.۵(۱) ۱(۲) ۰.۷۵(۱) ۰.۸(۲)

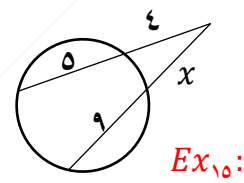
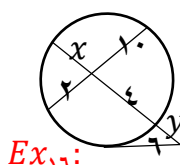
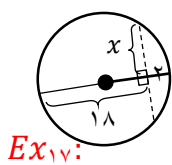
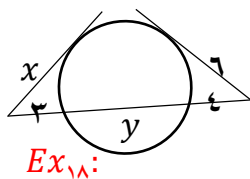
مثال ۱۲: مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۴ در دایره $C(O, 5)$ چیست؟

مثال ۱۳: در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر برهم عمودند.

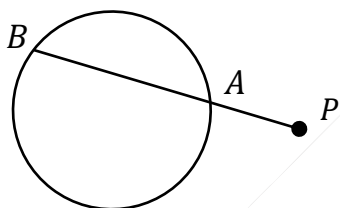
اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع دو دایره را پیدا کنید.



مثال ۱۴: دو دایره به شعاع های ۱ و ۵ ، مماس داخل اند. چند وتر به طول ۸ در دایره بزرگتر مماس بر دایره کوچکتر وجود دارند؟



مثال ۱۹: کمترین فاصله نقاط دایره ای به شعاع ۵ تا نقطه P ، است، اگر $PA - AB = 2$ باشد، AB چیست؟



مثال ۲۰: در دایره ای به قطر ۱۲ واحد، فاصله مرکز تا وتر AB ، ۲ است. نقطه C در امتداد AB قرار دارد به صورتی که $CB = 2\sqrt{2}$ است. طول مماس وارد بر دایره از نقطه C چیست؟

نکته: عمود منصف هر ضلع مثلث و نیمساز وارد در آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

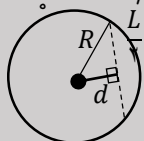
مثال ۲۱: اگر $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطه M تقاطع نیمساز و عمود منصف وارد بر ضلع BC باشند، مقدار $M\hat{B}C$

چيست؟

کوتاه ترین و بلندترین وتر گذرا از نقطه A

✓ بلندترین وتر گذرا از نقطه A : قطر است.

✓ کوتاه ترین وتر گذرا از نقطه A : وترى که در نقطه A به قطر عمود است یا نقطه وسط آن است، که برای یافتن کوتاه ترین وتر، می توان

از روابط طولی داخل دایره و یا پرتکه ی  استفاده کرد.

تعداد وتر به طول L گذرا از نقطه:

طول وتر	پیش تر از بیشترین	برابر بیشترین	بین کمترین و بیشترین	برابر کمترین	کمتر از کمترین
تعداد وتر	۰	۱	۲	۱	۰

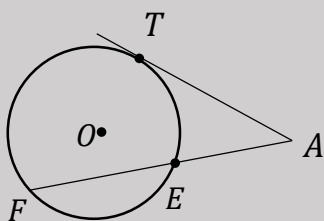
مثال ۲۲: نقطه M به کمترین و بیشترین فواصل \hat{A} ، \hat{B} تا دایره است. کوتاه ترین وتر گذرا از نقطه M چه

طولی دارد؟

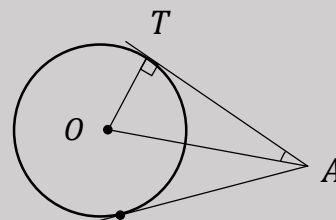
مثال ۲۳: نقطه A به صورتی روی وتر به طول \perp قرار دارد که آن را به نسبت \perp به \perp تقسیم می کند، کوتاه ترین وتر گذرا از نقطه A چه طولی دارد؟

مثال ۲۴: در دایره ای به محیط \perp نقطه A به طول \perp از مرکز است. چند وتر به طو \perp از A می گذرد؟

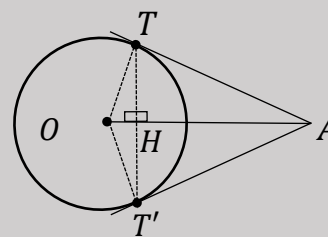
طول و زاویه بین مماس ها



روش ب:



روش الف:



مثال ۲۵: مماس هایی به طول \perp بر دایره ای به مساحت \perp رسم کردیم، طول و زاویه بین دو مماس و کمترین و بیشترین فاصله نقطه تا دایره را بیابید.

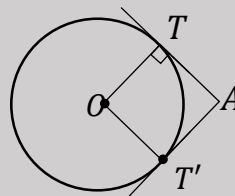
مثال ۲۶: دو دایره به شعاع ۵ ، ۲ مماس خارج اند. طول مماس مرسوم از مرکز دایره کوچک وارد بر دایره بزرگ چیست؟

مثال ۲۷: دو دایره $C(O, ۲)$ ، $C'(O', ۳)$ و $OO' = ۶$ مفروضند.
 الف) بلندترین مماس وارد بر C' از نقاط روی C چه طولی دارد؟
 ب) کوتاه ترین مماس وارد بر C از نقاط روی C' چه طولی دارد؟

نکات تکراری:

- ۱) مکان هندسی نقاطی که دو مماس با زاویه ۶۰° باهم بر دایره $C(O, R)$ رسم می شود، دایره $C'(O, ۲R)$ است.
- ۲) مکان هندسی نقاطی که دو مماس با زاویه ۹۰° باهم بر دایره $C(O, R)$ رسم می شود، دایره $C'(O, R\sqrt{۲})$ است.
- ۳) مکان هندسی نقاطی که دو مماس با زاویه ۱۲۰° باهم بر دایره $C(O, R)$ رسم می شود، دایره $C'(O, \frac{۲}{\sqrt{۳}}R)$ است.

(I)
(II)
(III)

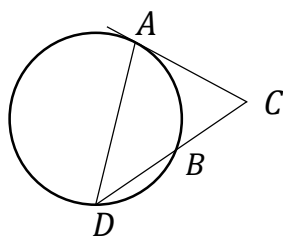


منیره:

مثال ۲۷: از نقطه A مماس هایی با زاویه ۶۰° باهم بر دایره ای به شعاع ۲ رسم کردیم. سطح محصور بین دو مماس و دایره چیست؟

مثال ۲۸: دو دایره $C(O, 4)$ ، $C'(O', 1)$ و $OO' = 9$ مفروضند. چند نقطه روی C ، C' را با زاویه 60° می بینند؟

مثال ۲۹: در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ باشد، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



- ۳(۲) ۲(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

مثال ۳۰: مماس هایی به طول ۴ بر دایره ای به شعاع ۳ رسم شده است. بیابید:

الف) کمترین و بیشترین فاصله نقطه تا دایره

ب) فاصله دو نقطه تماس

ج) فاصله مرکز تا خط واصل دو نقطه تماس

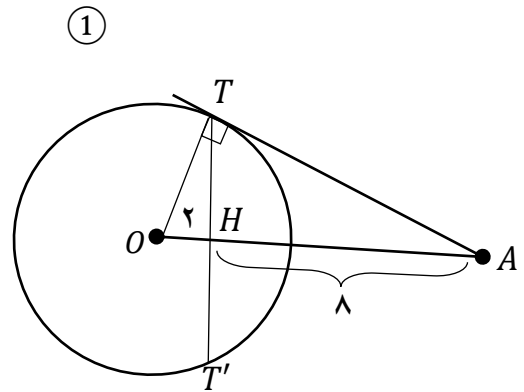
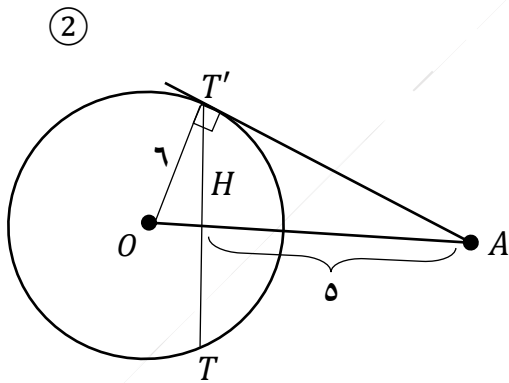
د) فاصله نقطه A تا خط واصل دو نقطه تماس

مثال ۳۱: در دو شکل زیر بیابید:

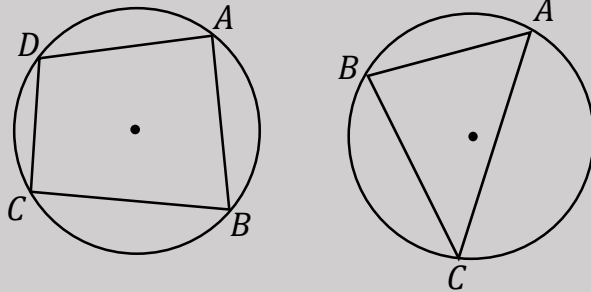
الف) تمام طول‌ها را TT', TH, AT, R, OA, AH ...

ب) کمترین و بیشترین فاصله نقطه تا دایره

ج) سینوس و تانژانت زاویه بین دو مماس



دوارِ معیّطی و معاطی



دایره معیّطی (شکل معاطی):

تعریف: رئوس شکل روی دایره اند.

مرکز: مرکز از رئوس به فاصله برابر است (هم‌مسوی عمود منصف‌ها)

و نیز چهار ضلعی معاطی: رئوس مقابل مکمل اند $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$

نکته: دوازده متساوی الساقین، مربع و مستطیل همیشه معاطی اند (چون و نیز راسی دارند). شاید معیّطی هم باشند!!!

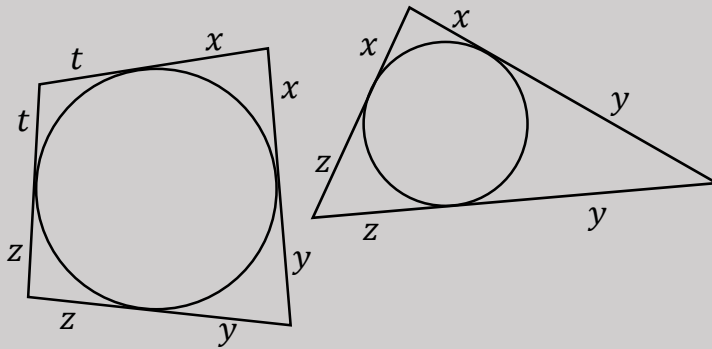


دایره معاطی (شکل معیّطی):

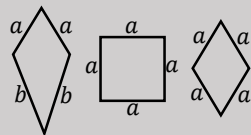
تعریف: اضلاع شکل مماس بر دایره اند.

مرکز: مرکز از اضلاع به فاصله برابر است (هم‌مسوی نیمسازها)

و نیز چهار ضلعی: مجموع اضلاع مقابل ثابت است.



نکته: لوزی، مربع و کایت همیشه معیّطی اند. شاید معاطی هم باشند!!!



نکته: شعاع هر دایره معاطی: $R = \frac{S}{p}$

مثال ۳۱: در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، اگر $\hat{A} = 80^\circ$ ، $\hat{D} = 130^\circ$ باشند، $\hat{B} - \hat{C}$ چیست؟

مثال ۳۲: دوزنقه متساوی الساقینی به ساق ۴ بر دایره ای محیط است. محیط دوزنقه چیست؟

مثال ۳۳: دوزنقه متساوی الساقینی به قاعده های ۲ و ۴ بر دایره ای محیط است. مساحت دوزنقه چیست؟

نکته:

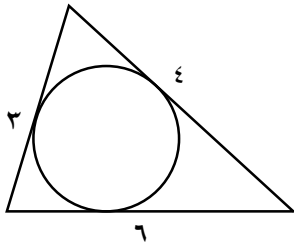
مثال ۳۴: دوزنقه متساوی الساقینی با قاعده کوچک ۲ و ساق ۱ بر یک دایره محیط است. نزدیک ترین راس تا دایره چه فاصله ای دارد؟

مثال ۳۵: اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، $AB = 8$ ، $CD = 4$ و شعاع ۳ باشند، مساحت چهارضلعی $ABCD$ است؟

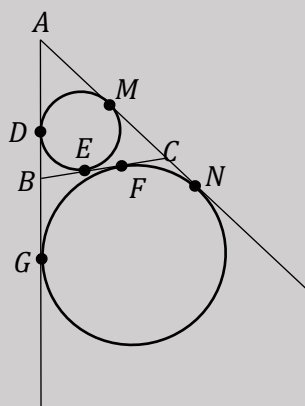
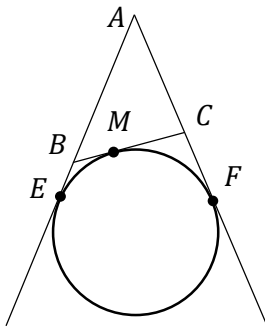
دایره معیط و معاط برای مثلث

مثال ۳۸: مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۶ محیط بر یک دایره است. هر سه ضلع به چه طول هایی تقسیم می

شوند؟



تمرین ۳۸: در شکل مقابل با تغییر نقطه تماس M محیط مثلث چه تغییری می کند؟



- ۱) تکه هایی که دایره معاطی داخلی روی هم ضلع ایجاد می کند.....
- ۱) تکه هایی که دایره معاطی خارجی روی هم ضلع ایجاد می کند.....
- ۱) مماس مشترک داخلی دو دایره معاطی داخلی و خارجی.....
- ۱) مماس مشترک خارجی دو دایره معاطی داخلی و خارجی.....

جمع بندی:

مثال ۳۹: در مثلثی به اضلاع ۷، ۴ و ۵ دایره محاطی خارجی مماس بر هر ضلع، ضلع را به چه طول هایی

تقسیم می کند؟

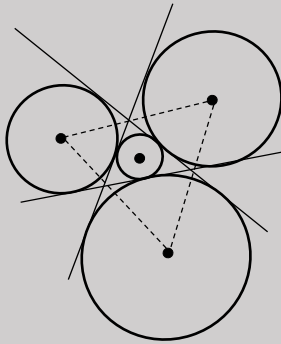
مثال ۴۰: در شکل مقابل $AB = ۵, AC = ۶, BC = ۷$ اند. بیابید:

الف) BE

ب) CF

ج) طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره

دوایر معاطی خارجی مثلث



$$R_{\text{معاطی}} = \frac{S}{P}, \quad R_a = \frac{S}{P-a}, \quad R_b = \frac{S}{P-b}, \quad R_c = \frac{S}{P-c}, \quad \begin{cases} \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} \\ \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{R} \end{cases}$$

روابط:

نتیجه:

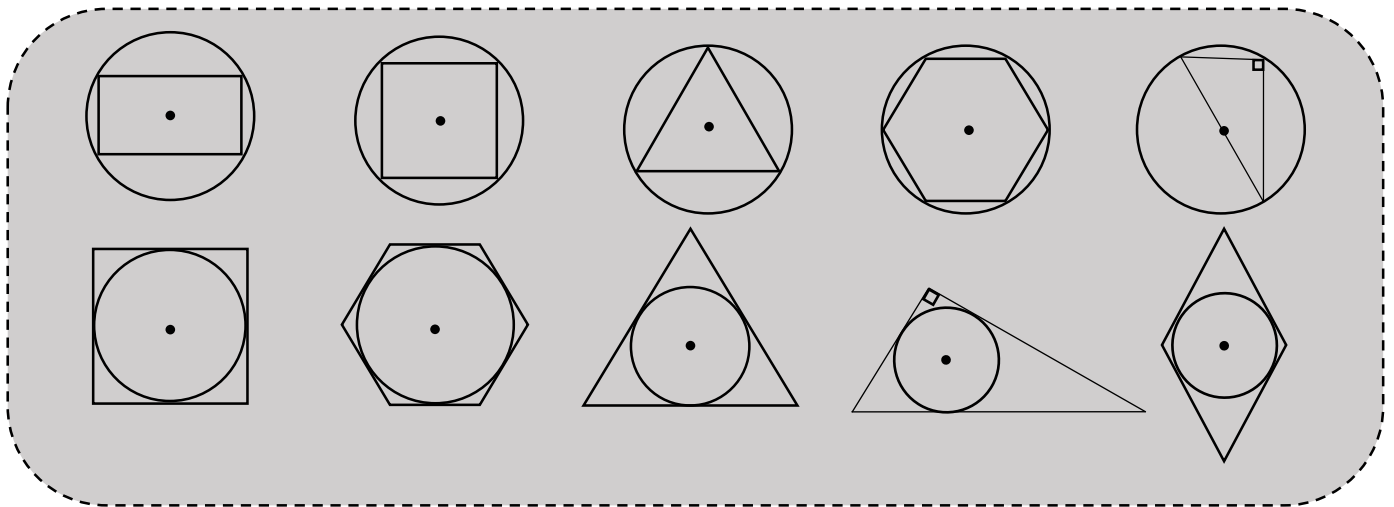
مثال ۴۱: در مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵، شعاع تمام دوایر محاطی را بیابید. مجموع معکوس ارتفاع ها

چيست؟

مثال ۴۲: در مثلثی با سه ارتفاع $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ ، شعاع دایره محاطی داخلی چیست؟ معکوس شعاع های دایره

محاطی خارجی چیست؟

روش نقطه‌بازی

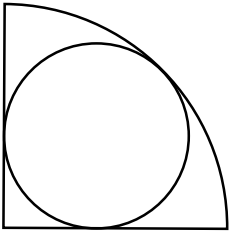


مثال ۴۳: مربعی به مساحت ۱۶ بر دایره ای محیط است. شش ضلعی منتظم محاط در دایره چه مساحتی دارد؟

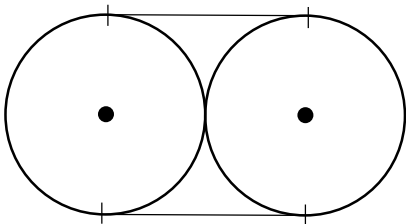
مثال ۴۴: سطح بین دو دایره محیط و محاط بر مثلث متساوی الاضلاعی به محیط ۱۸ چیست؟

مثال ۴۵: مثلثی به اضلاع ۳، $\sqrt{5}$ و ۲ محاط در دایره است. محیط دایره چیست؟

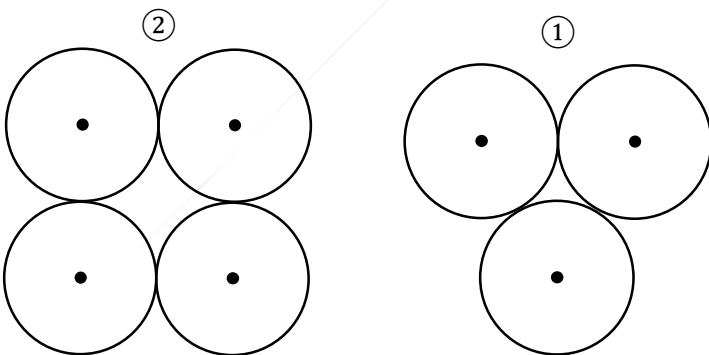
مثال ۴۶: شعاع دایره محاط در مثلثی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ چیست؟ فاصله دو نقطه تماس دایره و دوزلع کوچک چیست؟



مثال ۴۷: اگر شعاع ربع دایره ۲ باشد، شعاع دایره چیست؟



مثال ۴۸: هر دو دایره به شعاع ۲ هستند، طول و سطح محصور تسمه بر دوایر چیست؟



مثال ۴۹: شعاع تمام دوایر ۲ است، بیابید؟

الف) طول تسمه دور دایره ها

ب) سطح محصور بین دایره ها

ج) شعاع دایره بین دایره ها و مماس با آنها

نکته (n ضلعی محیطی و معاطلی):

وضعیت دو دایره

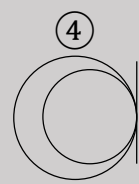
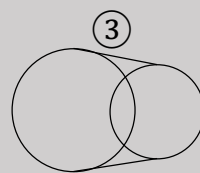
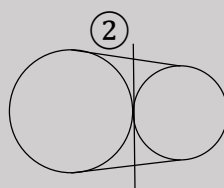
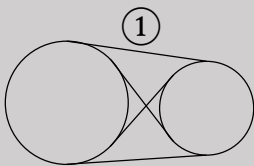
$$0 \quad R - r \quad R + r$$

ex_۵: $R = ۴, r = ۱, d = ۲ \rightarrow r = ?$

مثال ۵: اگر دوایری به شعاع ۲ و ۵ یک مماس مشترک داشته باشند. کوچکترین دایره گذرا از مرکز دایره

بزرگ و مماس بر دایره کوچک چه شعاعی دارد؟

مماس مشترک



(فراجه)

$$\begin{cases} TT' = \sqrt{d^2 - (R - r)^2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - r}{d} \end{cases}$$

(داخلی)

$$\begin{cases} TT' = \sqrt{d^2 - (R + r)^2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + r}{d} \end{cases}$$

مثال ۵۲: اگر $d = ۲$ و $r = ۳, R = ۴$ باشند، طول و زاویه بین دو مماس مشترک چیست؟

مثال ۵۳: برای دو دایره متخارج به شعاع های ۳ و ۲ ، بیشترین فاصله بین نقاط دو دایره ۱۲ است. مماس مشترک چه طولی دارد؟

مثال ۵۴: طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۱۱ ، ۳ ، $۳\sqrt{۳۳}$ است. کمترین فاصله بین نقاط دو دایره چیست؟

مثال ۵۵: اگر خط المرکزین دو دایره Δ و مماس مشترک داخلی و خارجی به ترتیب $\sqrt{۱۵}$ و $۳\sqrt{۷}$ باشند ، شعاع های دو دایره را بیابید.

مثال ۵۶: در دو دایره متقاطع زاویه بین مماس مشترک ها ۶۰° است، خط المرکزین کدام است؟

$$۲(R + r)(۴) \quad R + r (۳) \quad \sqrt{۲}(R - r)(۲) \quad ۲(R - r)(۱)$$

مثال ۵۷: دو دایره متخارج به شعاع های ۲۲.۵ , ۷.۵ مفروضند . اگر زاویه بین مماس مشترک داخل و خط مرکزین ۳۰° باشد ، طول خط مرکزین چیست؟

مثال ۵۸: دو دایره به شعاع های ۳ , ۴ متقاطع اند . فاصله نقطه تلاقی دو دایره تا وسط OO' برابر $\frac{OO'}{۳}$ است . مماس مشترک چه طولی دارد؟



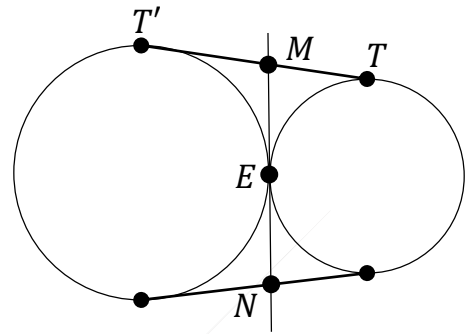
مثال ۵۹: دو دایره به شعاع های $r = ۴$, $R = ۹$ مماس اند . مماس مشترک چه طولی دارد؟

مثال ۶۰: دو دایره $C(O, ۲)$, $C'(O', ۸)$ و $OO' = ۱۰$ مفروضند . مساحت $T'OO'T$ چیست؟

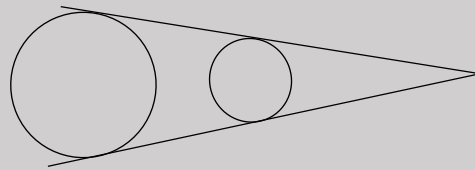
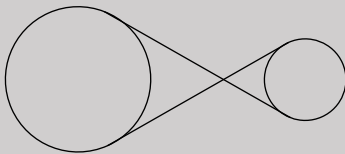
(T, T' نقطه تماس مماس مشترک با هر دایره)

مثال ۶۱: اگر شعاع های دو دایره رو به رو به \perp و \parallel باشند، بیابید:

- I) TT' II) MT III) ME IV) MN V) $ET^2 + ET'^2$



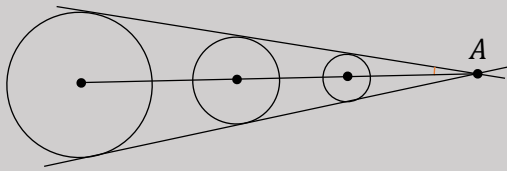
نکته: یافتن نقطه هم‌رسی دو مماس مشترک



مثال ۶۲: دو دایره به شعاع های ۱، ۲ مماس خارج اند. نقطه هم‌رسی دو مماس مشترک تا مرکز دایره کوچک چه فاصله ای دارد؟

مثال ۶۳: در دو دایره $r = 2, R = 3$ و $OO' = 10$ اند. مماس مشترک داخلی، خط المرکزین را به چه طول هایی قسمت می کند؟

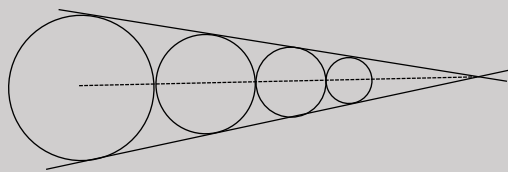
نکته: مسائل پند دایره ای



اگر قرار باشد ۲ مماس مشترک داشته باشند دو اهرکار کلی داریم:

(۲) حل با زاویه

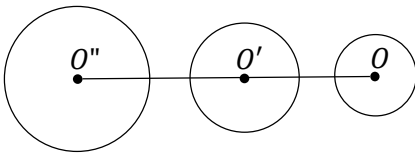
(۱) ناصرتالمس



حالت ناصرتالمس:

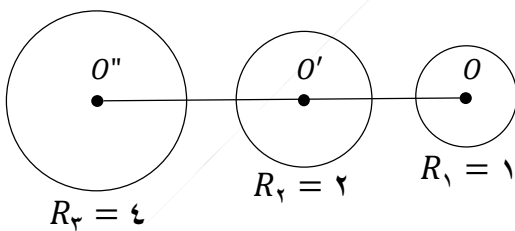
مثال ۶۴: اگر $R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 6, OO' = 7$ و دو خط بر هر سه دایره مماس باشند، OO'' را

بیابید.



مثال ۶۵: اگر در شکل مقابل $OO' = 4$ و $O'O'' = 10$ باشند، چند خط بر هر سه دایره مماس است؟ دو خط

بر هر سه دایره مماس باشند، OO'' را بیابید.



مثال ۶۶: اگر $R_1 = 1$ و $R_2 = 4$ باشند، R_3 چیست؟

