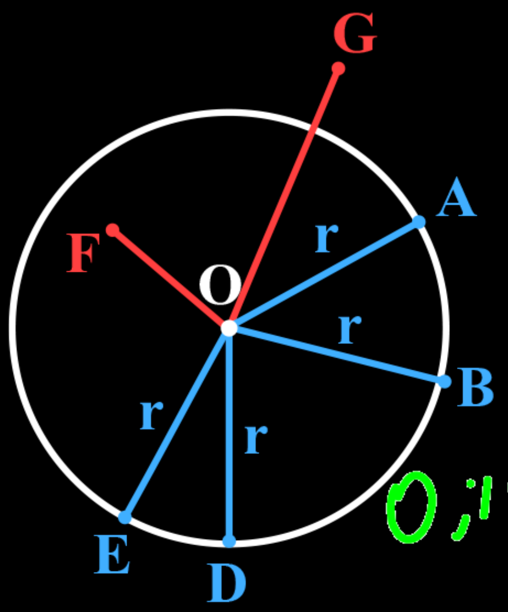
دهمی
یازدهمی
با بیا تام‌لند
دوره سالانه ۱۴۰۴

هندسه یازدهم

مهندس مجید علایی‌نسب

نتیجه: نقاطی روی دایره به مرکز O و شعاع r قرار دارند که فاصله‌شان از O برابر r باشد.

دایره



نقاط A و B و D و E و نقطه‌ی ثابت O را در نظر بگیرید. .این نقاط نسبت به O چه ویژگی مشترکی دارند؟

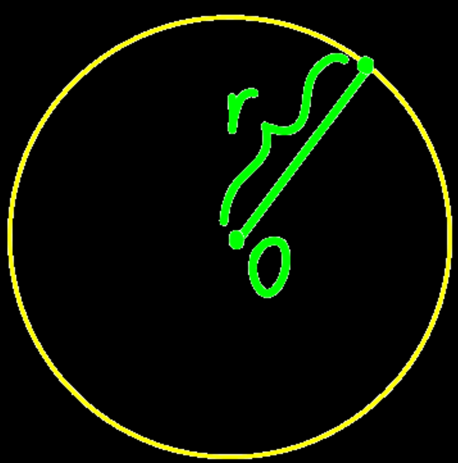
هر 4 نقطه از نقطه O فاصله‌ی یکسانی دارند که این فاصله را با r نشان داده‌ام.

آیا این ویژگی برای نقاط F و G صدق می‌کند؟

خیر با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه F از O کمتر از r بوده و فاصله‌ی نقطه G از O بیشتر از r می‌باشد.

تعریف دایره

مجموعه‌ی نقاطی در صفحه است که فاصله‌شان از یک نقطه‌ی ثابت واقع در همان صفحه، مقدار ثابت و معلوم $r>0$ باشد O را مرکز دایره و r را شعاع دایره می‌گویند. دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نشان می‌دهند.



$S = \pi r^2$

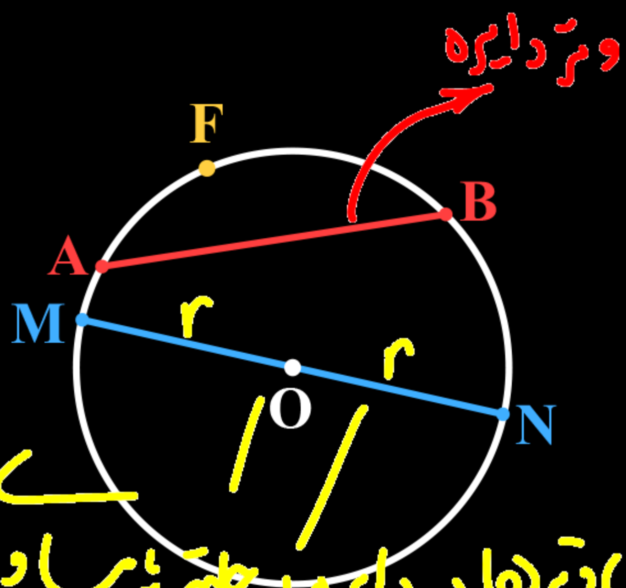
$\text{محیط} = 2\pi \cdot r$

• **وتر دایره:** پاره‌خطی است که ۲ نقطه‌ی متمایز را از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

• **قطر دایره:** وتری از دایره است که از مرکز دایره عبور می‌کند. قطر دایره بلندترین وتر دایره است.

به عبارت دیگر

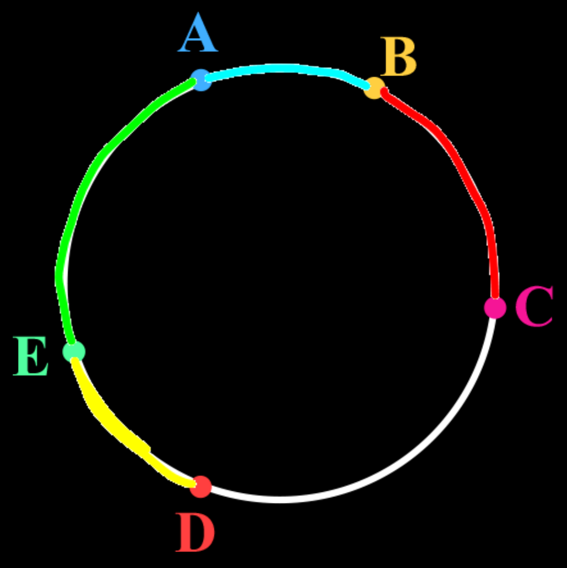
می‌باشد



اندازه‌ی تمامی وترها در دایره کوچکتر یا مساوی 2r

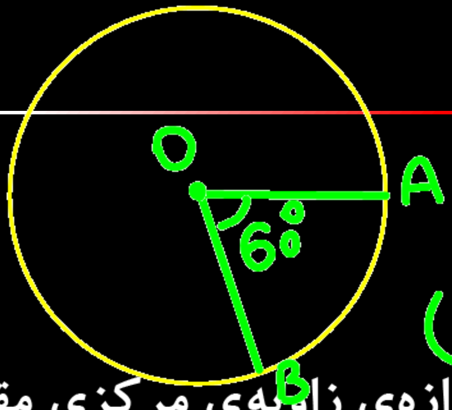
کمان:

به قسمتی از دایره که بین ۲ نقطه ی متمایز روی دایره محـدود می‌شـود کمـان دایـره گفتـه می‌شود. مجمـوع اندازه‌ی تمام کمان‌های دایره 360° می‌باشد.



$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DE}+\widehat{EA}=360^\circ$$

اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$



$L_{AB} = \frac{60}{360}(2\pi(2)) = \frac{2\pi}{3}$

$L_{CD} = \frac{60}{360}(2\pi(5)) = \frac{5\pi}{3}$

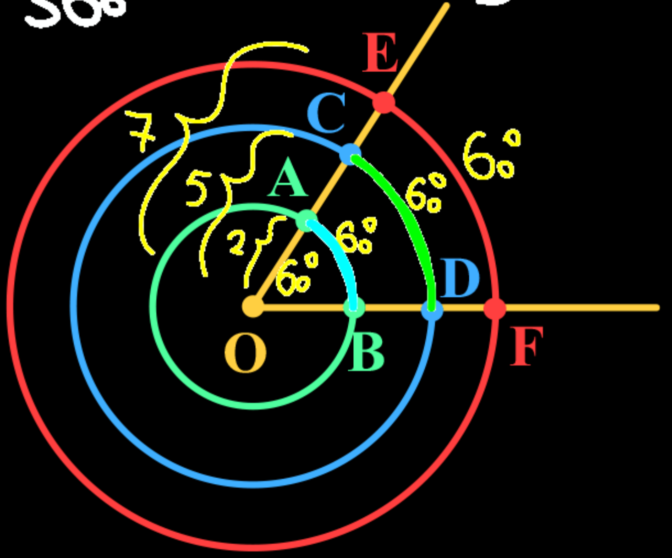
اندازه کمان – طول کمان:

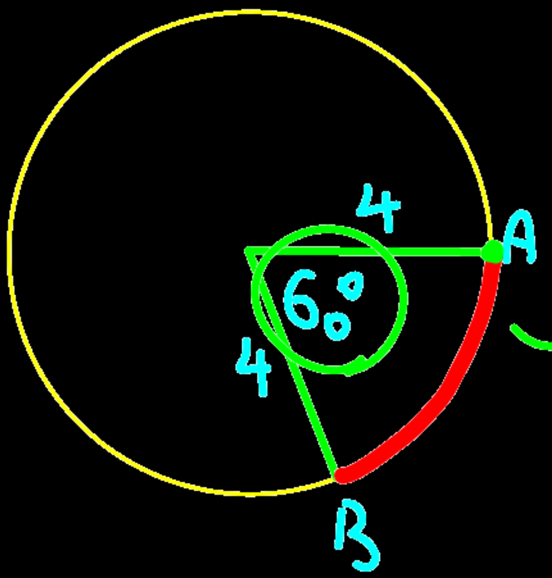
برحسب رادیان

اندازه‌ی یک کمان برحسب درجه بوده و برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان. بنابراین

کمانهای دایره‌های مختلف (با شعاع‌های متمایز) می‌توانند اندازه‌های برابر داشته باشند.

$L_{EF} = \frac{60}{360}(2\pi(7)) = \frac{7\pi}{3}$





طول کمان AB: $L_{AB} = ?$

$2\pi r \overset{r=4}{=} 8\pi$

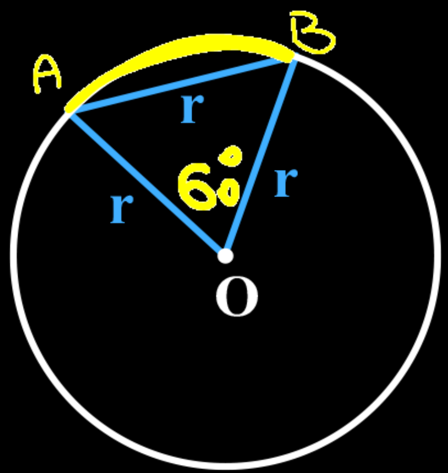
$L_{AB} = \frac{60}{360} \times 8\pi = \frac{1}{6}(8\pi)$

$\Rightarrow L_{AB} = \frac{4\pi}{3}$

نکته‌ی بسیار مهم:

اگر اندازه‌ی وتر AB:

الف) برابر اندازه‌ی شعاع دایره باشد آنگاه:



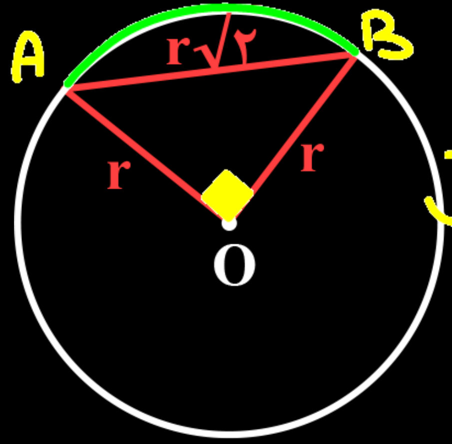
$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

$\overset{\Delta}{OAB}$ متساوی الاضلاع

نکته‌ی بسیار مهم:

• اگر اندازه‌ی وتر AB:

ب) $\sqrt{۲}$ برابر اندازه ی شعاع دایره باشد آنگاه :

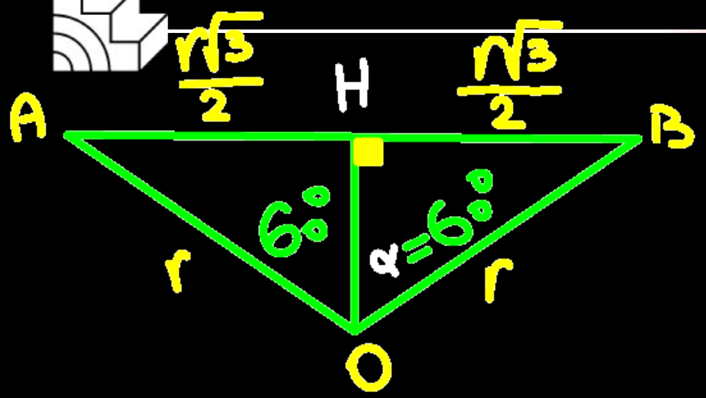


اندازه $\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$

$\overset{\Delta}{OAB}$: قائم‌الزاویه است

$$\left.\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= r^2 + r^2 = 2r^2 \\ AB^2 &= (r\sqrt{2})^2 = 2r^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$



نکته‌ی بسیار مهم:

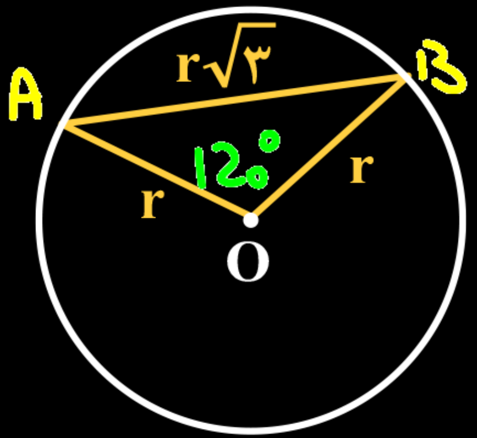
- اگر اندازه‌ی وتر AB:

پ $\sqrt{۳}$ برابر اندازه‌ی شعاع دایره باشد آنگاه:

$\Delta OBH: \ \sin\alpha = \frac{\frac{\cancel{r}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{r}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\longrightarrow \alpha = 60°$

اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB} = 120°$



طول کمان برحسب رادیان بوده و کسری از محیط دایره است. طول کمان AB در دایره‌ای $C(O,r)$ برابر است با:

$$L_{AB} = \frac{\pi r}{180^\circ} \times \alpha$$

اثبات: چون شعاع دایره r می‌باشد پس محیط دایره $2\pi r$ خواهد بود

می‌دانیم طول یک کمان کسری از محیط دایره است که مورد نظر است

اندازه کمان برابر 360° درجه می‌باشد:

$$L_{AB} = \frac{\alpha}{\cancel{360}^\circ} \times (\cancel{2}\pi r)$$

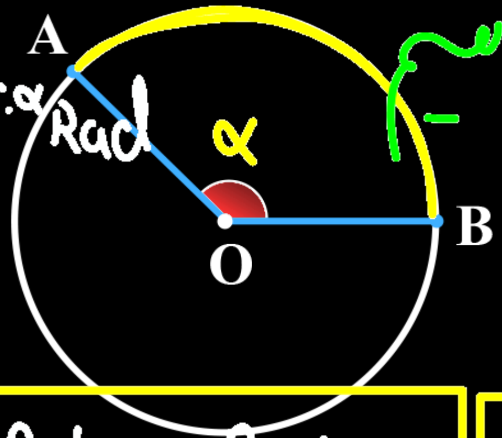
$$\Rightarrow L_{AB} = \frac{\pi r}{180} \times \alpha$$

$2\pi r$ 2π

$?$ α_{Rad}

$$\frac{2\cancel{\pi} r}{?} = \frac{2\cancel{\pi}}{\alpha_{Rad}}$$

$? = r.\alpha_{Rad}$



$$? = L_{AB} = r.\alpha_{Rad}$$

توجه: قطر دایره، دایره را به 2 قطاع مساوی تقسیم می‌کند و هر کدام از این 2 قطاع نیم دایره دارد.

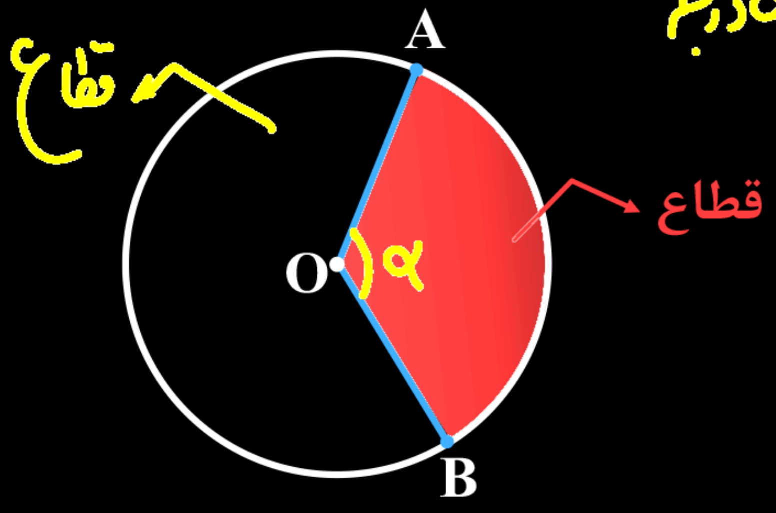
قطاع:

ناحیه‌ای از درون ورودی دایره را که به ۲ شعاع آن دایره و دایره محدود است یک قطاع دایره می‌گویند.

اگر زاویه‌ی مرکزی قطاع OAB از دایره‌ی $C(O,r)$ بر حسب درجه برابر α باشد مساحت قطاع OAB برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}} : \frac{\alpha}{360}\left(S_{\text{دایره}}\right) = \frac{\alpha}{360}\left(\pi r^2\right)$$

α درجه



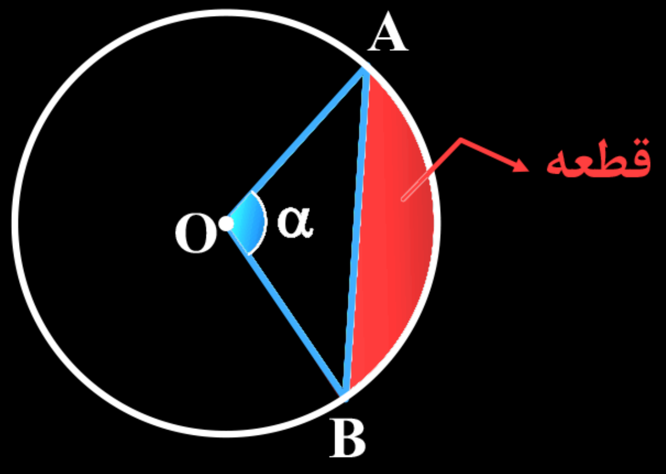
$$S = \frac{\pi r^{۲}}{۳۶۰^\circ} \times \alpha$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi r^2}{360} \times \alpha$$

قطعه:

ناحیه‌ای از درون ورودی دایره را که به یک وتر از دایره و کمان نظیر آن وتر محدود می‌شود قطعه می‌گویند.

مساحت قطعه برابر است با:



$$\boxed{\left(\frac{\pi r^{۲}}{۳۶۰^{\circ}}\times\alpha\right)-\left(\frac{۱}{۲}r^{۲}\sin\alpha\right)}$$

تست ۱ ناحیه‌ای محدود به یک نیم دایره و قطر آن می‌باشد. اگر عدد محیط این ناحیه با عدد مساحت آن برابر باشد، شعاع این نیم دایره کدام است؟

۱) $۱+\pi$

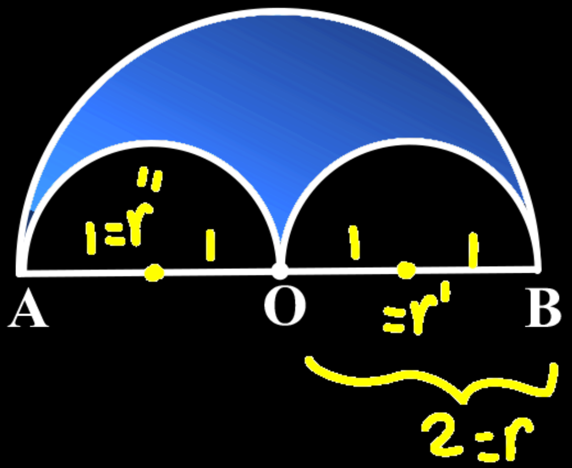
۲) $۱+\frac{۲}{\pi}$

۳) $۲+\pi$

۴) $۲+\frac{۴}{\pi}$

تست ۲ در شکل مقابل، $AB = ۴$ قطر نیم دایره به مرکز O است. مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟

۱) π ✓
۲) $\frac{۱}{۲}\pi$
۳) $\frac{۲}{۳}\pi$
۴) $\frac{۳}{۲}\pi$



$S_{\text{ناحیه رنگی}} = S_{\text{نیم دایره بزرگ}} - 2\,S_{\text{نیم دایره کوچک}}$

$= \frac{1}{2}\pi r^2 - \cancel{2}\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\pi r'^2\right)$

$= \frac{1}{2}\pi(2)^2 - \pi(1)^2 = 2\pi - \pi = \pi$

تست ۳ در قطاع به شعاع ۴ و زاویه مرکزی ۶۰ درجه، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

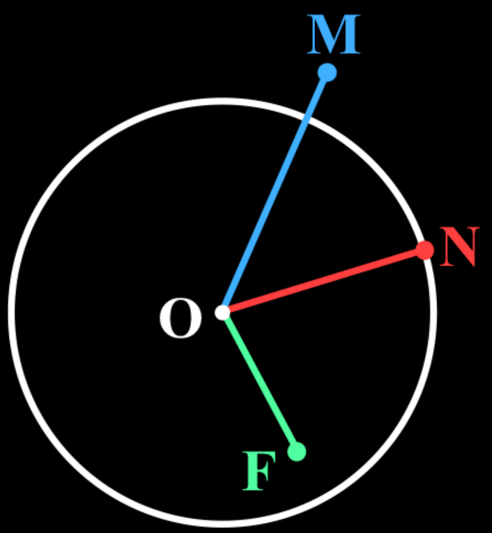
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

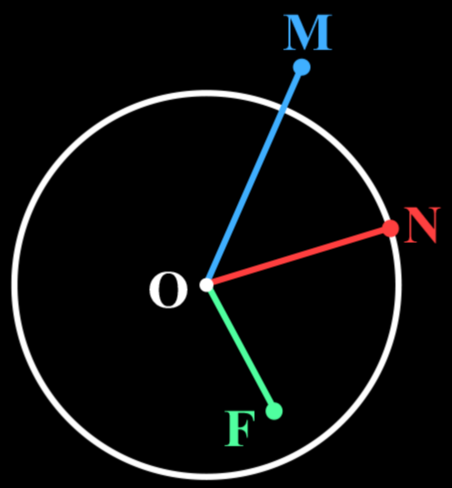
وضعیت نقطه و دایره:

خارج دایره: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه‌ی دایره است که فاصله‌شان از مرکز دایره بزرگتر از اندازه شعاع دایره است.



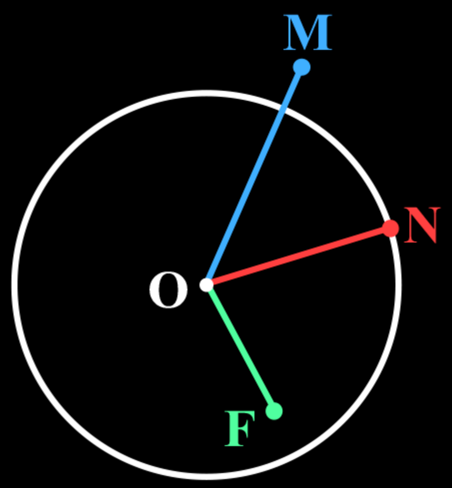
M خارج دایره ی $C(O,r)$ $\Leftrightarrow |OM| > r$

محیط دایره: مجموعه نقاطی از صفحه‌ی دایره است که فاصله‌شان از مرکز دایره با اندازه‌ی شعاع دایره برابر است:



$$N \text{ روی دایره‌ی } C(O,r) \Leftrightarrow |NO| = r$$

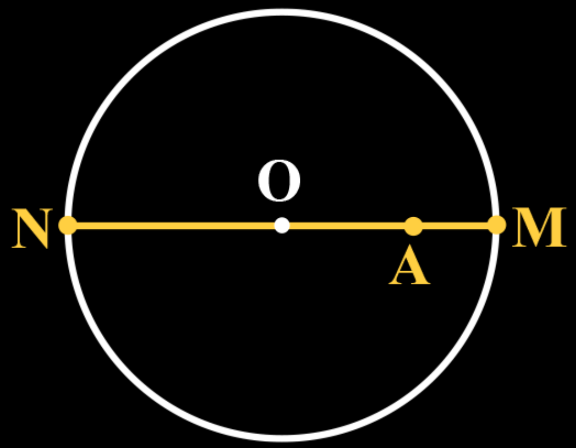
درون دایره: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه‌ی دایره است که فاصله‌شان از مرکز دایره کمتر از اندازه‌ی شعاع دایره است.

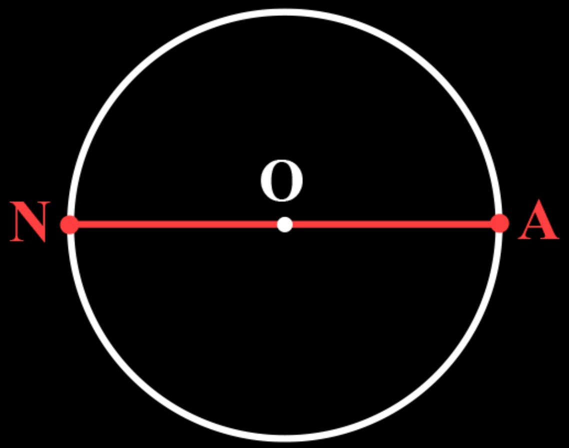


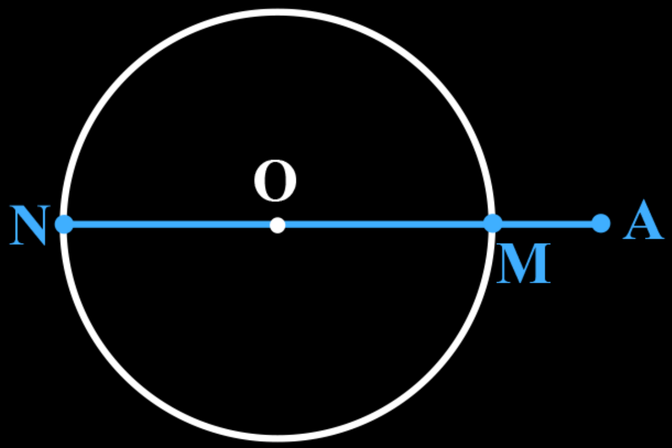
$C(O,r)$ درون دایره‌ی $F \Leftrightarrow |FO| < r$

کمترین و بیشترین فاصله‌ی یک نقطه تا نقاط دایره:

برای یافتن کمترین و بیشترین فاصله‌ی یک نقطه تا نقاط دایره از نقطه‌ی موردنظر به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد این خط دایره را در ۲ نقطه قطع کند در این صورت:





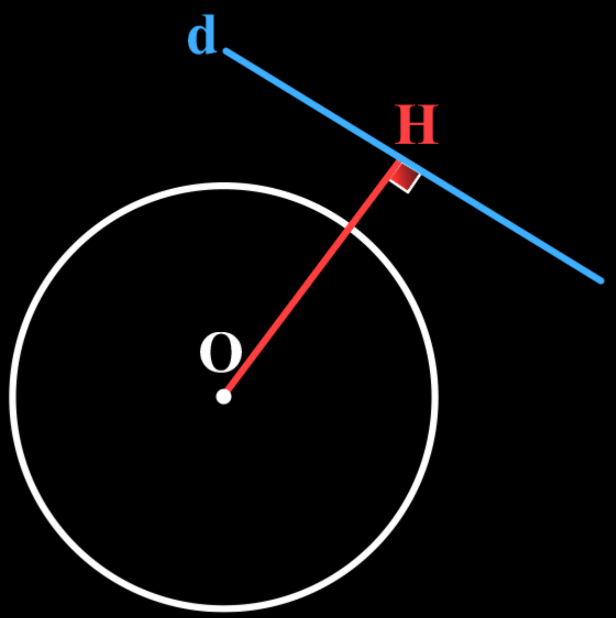


وضعیت نسبی خط و دایره:

برای یافتن وضعیت نسبی خط d با دایره ی $C(O,r)$ ابتدا فاصله‌ی نقطـه‌ی O از خـط را بـه دسـت مـی‌آوریم.

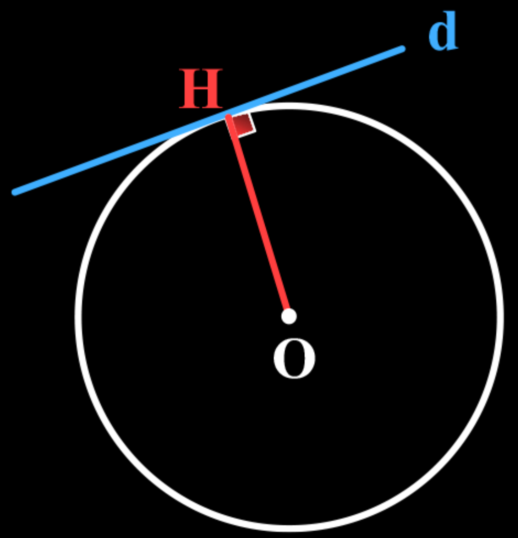
($|OH|$) سپس عدد حاصل را با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. یکی از حالات زیر پیش می‌آید:

حالت اول: $|OH| > r$: در این حالت خط و دایره فاقد نقطه‌ی مشترک‌اند.



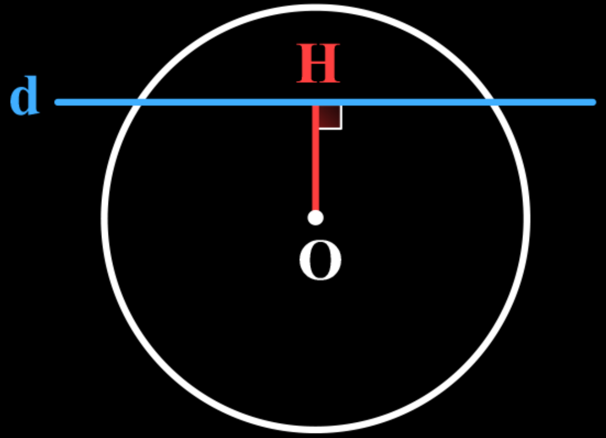
حالت دوم: $|OH| = r$: در این حالت خط و دایره در یک نقطه (H) مشترک‌اند و می‌گوییم خط d بر دایره‌ی $C(O,r)$ مماس است.

در این حالت نزدیکترین نقطه خط d به نقطه‌ی O همان H می‌باشد.

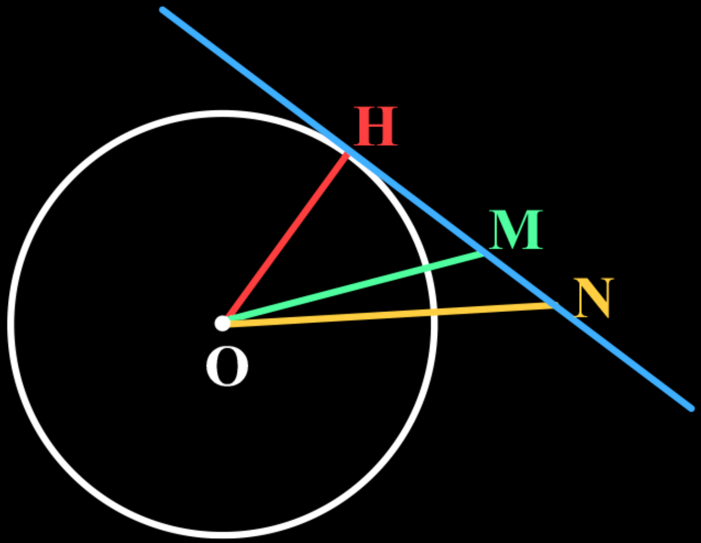


ادامهٔ وضعیت نسبی خط و دایره:

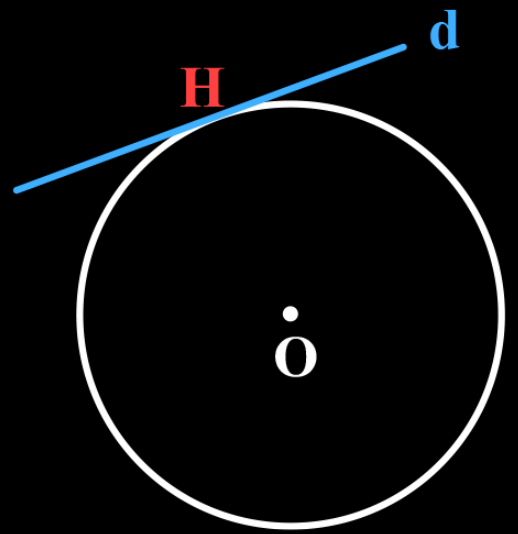
حالت سوم: $|OH| < r$: در این حالت خط d، دایره‌ی C را در ۲ نقطه قطع می‌کند و می‌گوییم خط و دایره متقاطع‌اند. خط d در این حالت خط قاطع نام دارد.



مثال ۴ خط d در نقطه‌ی H بر دایره‌ی C مماس است. اگر از O عمودی بر خط d رسم کنیم این عمود خط d را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ چرا ؟



قضیه شعاع بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است.



فرض:

حکم:

اثبات:

مدرسه‌ای برای همه

تاپلرن