تام لند
(سرزمین تام)

با ❤ بیا تام لند

کنکور سالانه ۱۴۰۳

گسسته دوازدهم

آنالیز ترکیبی (شمارش بدون شمردن)

مهندس بهمن موذنی‌پور

آنالیز ترکیبی در یک نگاه

- اصل ضرب
  - اصل جمع
  - اصل متمم
- شمارش
  - فاکتوریل
  - جایگشت
  - جایگشت کنار هم
  - جایگشت r شیء از n شیء
  - جایگشت یک در میان
  - جایگشت دوری
  - جایگشت با تکرار
- انتخاب (ترکیب)
  - جایگشت فاصله‌دار
  - انتخاب شامل و فاقد
  - مسائل هندسی

اصول شمارش

الف) اصل اساسی اول (اصل ضرب):

اگر انجام عملی دومرحله‌ای (چندمرحله‌ای) باشد، به‌طوری‌که در مرحله اول m روش و برای هرکدام از این m روش، n روش در مرحله دوم وجود داشته باشد، کل آن عمل با $m\times n$ روش قابل انجام است.

ب) اصل اساسی دوم (اصل جمع):

اگر عملی را بتوان به دو روش (چند روش) انجام داد به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، کل آن عمل به $m+n$ روش قابل انجام است.

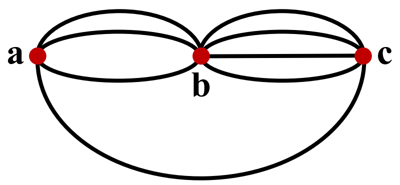
تذکر به تمایز انجام یک عمل با دو روش، و انجام یک عمل با دو مرحله دقت کنید!

نتیجه به‌طورکلی در علم اعداد «و» به معنای ضرب، «یا» به معنای جمع می‌باشد.

مثال ۱ دو نفر برای یک انتخابات کاندیدا شده‌اند، برای این انتخابات ۱۵ رأی‌دهنده وجود دارد که این ۱۵ نفر حداکثر می‌توانند به یک نفر رأی دهد. این انتخابات به چند طریق انجام می‌شود؟

مثال ۲ با ارقام $\{0,1,2,3,4\}$ چند عدد پنج رقمی مضرب ۴ می‌توان ساخت؟

تست ۳ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از a به c رفت و سپس به a برگشت به طوری که مسیر رفت و برگشت دقیقا یکسان نباشد؟



۱) ۱۴۴
۲) ۱۵۶
۳) ۱۶۸
۴) ۱۸۲

توجه در حل مسائل اصول شمارش همیشه ابتدا تکلیف جایگاهی را مشخص می‌کنیم که دارای شرط است.

تست ۴ چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟ (کنکور سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۱۸۴۰
۲) ۱۹۲۰
۳) ۲۱۶۰
۴) ۲۴۰۰

مثال ۵ با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد؟

تست ۶ چند عدد فرد با ارقام غیرتکراری بین ۳۰۰۰ و ۹۰۰۰ وجود دارد؟

(۱) ۱۰۲۴ (۲) ۱۶۹۶ (۳) ۱۵۱۲ (۴) ۲۰۰۴

تست ۷ با ارقام $(۰,۲,۴,۵,۷,۸)$ چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۴۸ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

تست ۸ با ارقام $۰,۱,۲,۳,۴,۵$ چند عدد چهار رقمی زوج کوچک‌تر از ۴۲۰۰ می‌توان نوشت؟

(۱) ۶۸۹ (۲) ۳۶۰ (۳) ۳۶۵ (۴) ۶۶۰

مثال ۹ مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

مثال ۱۰ مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه دارد که در همه آن‌ها حرف a باشد ولی حرف d نباشد؟

اصل متمم

- در برخی سؤالات ممکن است شمارش مستقیم سخت باشد. در این مسائل ابتدا حالت‌های نامطلوب را شمرده از کل حالات کم می‌کنیم.

تست ۱۱ با ارقام صفر تا ۶ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به طوری که شامل رقم ۲ باشد؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۴۴۰

تست ۱۲ با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به شرط آن‌که در هرکدام از آن‌ها دست‌کم یک رقم فرد وجود داشته باشد؟

۱) ۷۴ ۲) ۸۲ ۳) ۷۶ ۴) ۱۰۰

فاکتوریل

- حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را $n!$ می‌نامند.
- **قرار داد:**

نکته برای ساده کردن عبارات شامل فاکتوریل به رابطه‌ی زیر دقت کنید:

$$n!=n(n-1)!=n(n-1)(n-2)!=\dots$$

تست ۱۳ اگر $(n-1)((n-1)!+(n-2)!)=720$، در این صورت حاصل n کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

تست ۱۴ معادله $(5x^2-4x)!=1$ دارای چند جواب است؟

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

جایگشت

- اگر بخواهیم n شیء متمایز را کنار هم قرار دهیم، همیشه جایگاه اول n حالت، جایگاه دوم $(n-1)$ حالت و ... برای جایگاه آخر ۱ حالت وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1=n!$$

- پس به طور کلی n شیء متمایز به $n!$ حالت کنار یکدیگر جا بجا می‌شوند.

تست ۱۵ چند جایگشت از حروف کلمه «تاملند» با تام شروع می‌شود؟

(۱) $4!$ (۲) $2\times4!$ (۳) $6!-2$ (۴) $3!$

مثال ۱۶ ۷ خودکار متمایز و ۴ مداد متمایز به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار بگیرند هرگاه:

الف محدودیتی در کار نباشد.

ب همهٔ خودکارها کنار هم باشند.

ج همهٔ مدادها کنار هم باشند.

د همهٔ خودکارها کنار هم و همهٔ مدادها نیز کنار هم باشند.

تست ۱۷ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «تاملند» که در آن‌ها حروف کلمه «لند» کنار هم باشند را A و تعداد جایگشت‌هایی که در آن‌ها کلمه «لند» دیده شود را B درنظر می‌گیریم. تعداد عضوهای A منهای تعداد عضوهای B کدام است؟

۱) ۱۴۴
۲) ۱۲۰
۳) ۱۳۸
۴) ۹۶

مثال ۱۸ افراد A، B، C، D، E و F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند که A و B کنار هم باشند و E و F کنار هم نباشند؟

تام‌لند (سرزمین تام)

مثال ۱۹ ۵ نفر A، B، C و D و E به چند طریق می‌توانند وارد یک اتوبوس شوند هرگاه:

الف محدودیتی در کار نباشد.

ب نفر A دقیقاً قبل از B وارد شود.

ج نفر A قبل از نفر B وارد شود.

د نفر A دقیقاً قبل از نفر B و نفر C قبل از نفر D وارد شود.

تست ۲۰ با حروف کلمه equation چند کلمه هشت حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت بـه طـوری کـه حرف t بعد از q و حرف q بعد از حرف n باشد؟

۱) ۶۷۲۰ ۲) ۱۳۴۴ ۳) ۹۶۰ ۴) ۵۰۴۰

تست ۲۱ در یک ساختمان ۶ طبقه، افراد a,b,c,d,e,f هر کدام در یک طبقه زندگی می‌کنند. اگر بدانیم واحد a بالاتر از b است. در چند حالت فرد b ساکن طبقه سوم است؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

تست ۲۲ با جایگشت ارقام ۱،۳،۵،۷ تمام عددهای چهاررقمی ممکن را نوشته‌ایم، مجموع دهگان همه این اعـداد کدام است؟

۱) ۹۴ ۲) ۹۵ ۳) ۹۶ ۴) ۹۷

تست ۲۳ قرار است افراد a،b،c،d،e و f وارد یک آسانسور شوند. تعداد حالت‌هایی که بین افراد a و b دقیقاً یـک فرد دیگر وارد شود، کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۹۲ ۳) ۹۶ ۴) ۲۸۸

تست ۲۴ در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار همزمان وارد مطب می شوند. بـه چنـد طریـق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دونفر از آنها نخواهند کنار هم بنشینند؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۱۵۶۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۲۰۴۰ ۴) ۲۲۸۰

تست ۲۵ با ارقام ۱،۲،۳،۳،۳،۶،۷ چند عدد هفت رقمی می‌توان ساخت به طوری که بین ارقام زوج دقیقا دو رقـم فاصله وجود داشته باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۰۰

جایگشت r شیء از n شیء

◆ اگر از بین n شیء بخواهیم فقط r تا از آن‌ها را کنار هم قرار دهیم $\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots}_{r}$ حالت خواهیم داشت.

این حاصل‌ضرب را یک جایگشت r تایی از n شیء می نامند و آن را با $P(n,r)$ نشان می‌دهند. به راحتی می‌توان ثابت کرد $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، معمولاً از این فرمول استفاده نمی‌کنیم و همان اصل ضرب را ترجیح می‌دهیم.

تست ۲۶ می‌خواهیم با ۶ رنگ مختلف سه قفسه یک کتابخانه را رنگ‌آمیزی کنیم، به‌طوری‌که رنگ هیچ دو طبقه‌ای، یکسان نباشد، تعداد کل حالات رنگ‌آمیزی کدام است؟

۱) ۶۰   ۲) ۱۲۰   ۳) ۷۲۰   ۴) ۵۰

جایگشت‌های یک‌درمیان

مثال ۲۷ ۴ خودکار متمایز و ۳ مداد متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان کنار هم قرار داد؟

مثال ۲۸ ۴ خودکار متمایز و ۴ مداد متمایز به چند حالت می‌توانند یک در میان کنار هم قرار بگیرند؟

مثال ۲۹ ۴ خودکار متمایز و ۳ مداد متمایز به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند هرگاه مدادها یک در میان باشند؟

جایگشت دوری

- اگر اشیای متمایز به جای قرار گرفتن در صف، دور یک میز قرار بگیرند، تعداد حالت‌ها $(n-1)!$ خواهد بود، اگر دوران هم مجاز باشد (مثلاً در جاکلیدی یا تسبیح) تعداد حالت‌ها $\frac{(n-1)!}{2}$ خواهد بود.

تست ۳۰ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان روی صندلی‌ها قرار می‌گیرند به طوری که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

مثال ۳۱ ده زوج زن و شوهر به چند طریق دور یک میز دایره‌ای قرار می‌گیرند، هرگاه هر زنی کنار شوهر خود قرار بگیرد؟

مثال ۳۲ با ۵ مهره‌ی متمایز به چند طریق می‌توان یک گردنبند درست نمود؟

مثال ۳۳ در یک جلسه ۶ نفر قرار است دور یک میز بنشینند. در چند حالت رئیس روبروی منشی قرار می گیرد؟

جایگشت اشیاء با تکرار

◆ اگر از بین n شیء که کنار هم قرار می‌گیرند، k تا یکسان باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با $\frac{n!}{k!}$، پس مثلاً با ارقام متمایز ۱،۲،۳،۴،۵ به تعداد !۵ عدد ۵ رقمی داریم اما با ارقام ۱،۱،۳،۴،۵ به تعداد $\frac{۵!}{۲!}$ عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت.

مثال ۳۴ ۷ خودکار متمایز و ۴ مداد یکسان به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر جابه‌جا شوند به‌طوری‌که:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) همهٔ خودکارها کنار هم باشند.

ج) همهٔ مدادها کنار هم باشند.

مثال ۳۵ دو توپ آبی یکسان و ۷ توپ قرمز یکسان به چند طریق می‌توانند کنار یکدیگر قرار گیرند هرگاه:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) ابتدای صف توپ آبی قرار گیرد.

ج) یک طرف توپ آبی و طرف دیگر توپ قرمز باشد.

د) دو طرف صف توپ آبی قرار گیرد.

تست ۳۶ در چند جایگشت از حروف AABBCCDD عبارت ABCD ظاهر می‌شود؟

۱) ۱۱۹ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۵

تست ۳۷ با ارقام ۵ و ۶ و ۶ و ۷ و ۷ چند کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که رقم وسط، ۵ باشد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

تست ۳۸ در چند جایگشت شش‌تایی با حروف E,E,E,E,N,N دو حرف اول و آخر یکسان‌اند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۳

تست ۳۹ با حروف a,a,a,b,c,d چند ترکیب می‌توان نوشت، به شرط آن‌که حروف a یک‌درمیان قرار گرفته باشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

تست ۴۰ با ۴ مهره به رنگ‌های زرد و قرمز و آبی و مشکی و ۲ مهره سفید یکسان به چند حالت می‌توان یک گردنبند ساخت؟

۱) $۵!$ ۲) $۲\times۵!$ ۳) $\frac{۵!}{۴}$ ۴) $\frac{۵!}{۲}$

بررسی سه مثال جایگشت با تکرار و وابسته به هم

مثال ۴۱ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۲ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۶حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۳ با حروف کلمه‌ی APADANA چند کلمه‌ی ۴حرفی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۴ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۵ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۶ با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۷ با ارقام ۰ ، ۱، ۴، ۴، ۴ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

مثال ۴۸ با ارقام ۰،۰،۰،۰،۳،۳،۳،۳ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

تست ۴۹ چند عدد چهاررقمی با ارقام ۵،۵،۵،۲،۲،۲ می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۴

ترکیب

◆ هرگاه بخواهیم از بین n شیء، k شیء را صرفاً انتخاب کنیم از رابطه ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

توجه به‌طورکلی ترکیب کردن به معنای انتخاب کردن است، بنابراین از این پس فقط و فقط از رابطهٔ ترکیب استفاده کرده و درصورت نیاز به جابه‌جایی آن را در جابه‌جایی اشیاء ضرب می‌کنیم، در نتیجه به‌طورکلی:

ترکیب کردن = انتخاب کردن

تست ۵۰ از بین ۵ دانش‌آموز سال دوازدهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم به چند طریق می‌توان ۲ سال دوازدهمی و ۲ سال یازدهمی را انتخاب کرد و در یک صف ایستاند؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۳۰۲۴

مثال ۵۱ مجموعه $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

تست ۵۲ حاصل $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۱۴۰۰)

۱) $n2^{n-1}$ ۲) $n2^{n}$ ۳) $(n-1)2^{n-1}$ ۴) $(n-1)2^{n}$

مثال ۵۳ از بین ۶ مرد و ۵ زن به چند طریق می‌توان گروهی ۴ نفره انتخاب کرد که حداقل ۳ زن در گروه باشد؟

بررسی یک مسئله خاص در مورد جایگشت‌های فاصله‌دار

مثال ۵۴ ۵ مرد و ۳ زن به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند که هیچ دو زنی کنار هم نباشند؟

تست ۵۵ می‌خواهیم تعدادی جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف c,cb,b,b,a,a,a,a کدگذاری کنیم، به شرط آن‌که هیچ‌کدام از حروف a، کنار هم نباشند. تعداد کل جعبه‌هایی که می‌توان با این روش کدگذاری کرد، چندتا است؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۵۰

انتخاب با شرط شامل و فاقد

مثال ۵۶ به چند طریق می‌توان از بین یک گروه ۱۰ نفری گروه‌های ۵ نفری انتخاب کرد هرگاه:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) نفر اول حتماً انتخاب شود.

ج) نفر آخر انتخاب نشود.

د) دو نفر اول انتخاب شوند ولی نفر آخر انتخاب نشود.

تست ۵۷ می‌خواهیم از بین ۷ نفر، سه نفر را به تصادف انتخاب کنیم به‌طوری‌که نفرات A و B با هم انتخاب نشوند. این کار به چند حالت قابل انجام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۱

تست ۵۸ به چند طریق می‌توان از میان ۵ زوج ۴ نفر را انتخاب کرد به‌طوری‌که هیچ زوجی در بین این ۴ نفر نباشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۰

تست ۵۹ در یک آزمون، از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را انتخاب کرد، به شرط آن‌که حداقل ۴ پرسش از ۵تای اول انتخاب شده باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

مثال ۶۰ با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت به‌طوری‌که در همه‌ی آن‌ها یکان بزرگ‌تر از دهگان، دهگان بزرگ‌تر از صدگان و صدگان بزرگ‌تر از هزارگان باشد؟

مثال ۶۱ از هریک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دوبه‌دو غیرهم‌منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

مثال ۶۲ مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی مفروض است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی دارد هرگاه:

الف) محدودیتی در کار نباشد.

ب) همهٔ این زیرمجموعه‌ها شامل رقم ۲ باشند.

تام‌لند (سرزمین تام)

ج) همهٔ این زیرمجموعه‌ها شامل ضرایب ۳ باشند.

د) همهٔ این زیرمجموعه‌ها فاقد ضرایب ۴ باشند.

ه) در همهٔ این زیرمجموعه‌ها عدد ۲ عضو min و عدد ۸ عضو max باشد.

تست ۶۳ مجموعه $A=\{۱,۲,...,۷\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A که فاقد عدد ۱ باشند، چندتا بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی A شامل عدد ۱ می‌باشد؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

تست ۶۴ با حروف کلمه ARRANGE چند کلمه هفت‌حرفی می‌توان ساخت به‌طوری‌که در هریک از آن کلمات، یکی از دو حرف G و E در سمت راست و دیگری در سمت چپ N باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

۳) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۴) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$

مثال ۶۵ حاصل $\binom{۱۷}{۱۲}+\binom{۱۷}{۴}$ کدام است؟

تست ۶۶ حاصل رابطه $\binom{۱۰}{۲}+\dots+\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}$ کدام است؟

۱) $\binom{۱۱}{۲}$
۲) $\binom{۱۱}{۳}$
۳) $\binom{۱۲}{۲}$
۴) $\binom{۱۲}{۳}$

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

۵) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$

مثال ۶۷ حاصل $\binom{۹}{۸}+\dots+\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۱}$ کدام است؟

اتحادهای مربوط به رابطه ترکیب

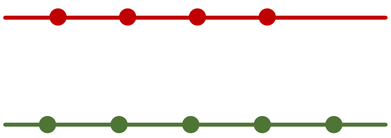
۶) $\underbrace{\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\dots}=\underbrace{\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+\dots}=۲^{n-۱}$

تست ۶۸ حاصل $\binom{20}{17}+\dots+\binom{20}{5}+\binom{20}{3}+\binom{20}{1}$ کدام است؟

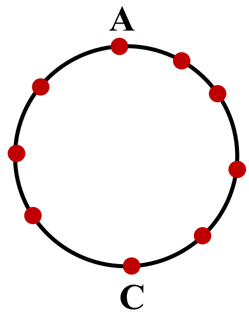
(۱) $2^{20}-1$ (۲) $2^{20}-20$ (۳) $2^{19}-1$ (۴) $2^{19}-20$

مسائل هندسی شمارش

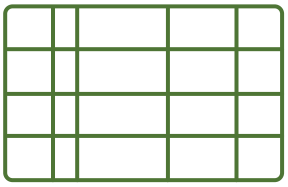
مثال ۶۹ با نقاط شکل زیر چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟



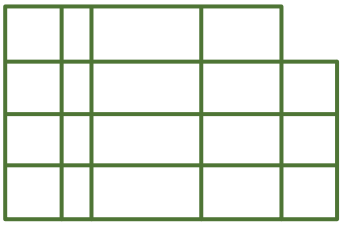
مثال ۷۰ در شکل مقابل چند چهارضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که AC قطر چهارضلعی باشد؟



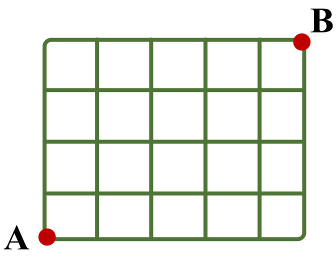
مثال ۷۱ در شکل زیر چند چهارضلعی وجود دارد؟



مثال ۷۲ تعداد چهار ضلعی‌های شکل زیر چندتاست؟



مثال ۷۳ در شبکه‌ی مقابل به چند طریق می‌توان از A به B حرکت کرد به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر طی شده باشد؟



مثال ۷۴ در شبکه‌ی مقابل به چند طریق می‌توان از A به B با کوتاه‌ترین مسیر رفته به شرطی که از نقطه‌ی C عبور کرده باشیم؟