



دوره جدید تمام‌لند
شروع از صفر

کنکور ۱۴۰۴

حسابان و پایه‌های مرتبط

مثلثات

استاد ایزدیناه

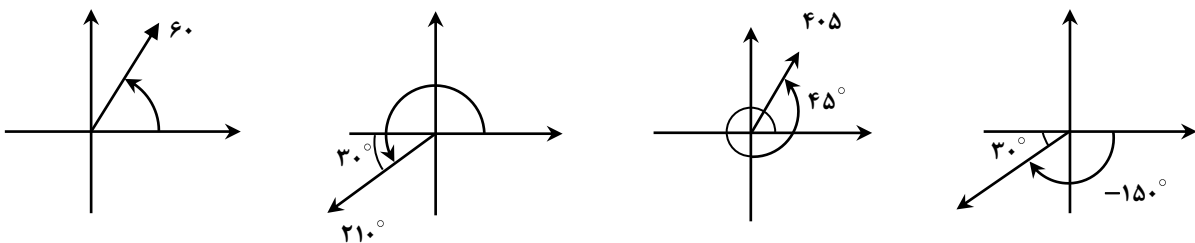
مثلات

زوای و اندازه‌ی زوای:

در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند، ایجاد می‌شود که یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم‌خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد در نظر می‌گیریم. یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود. اگر تغییر مکان نیم‌خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

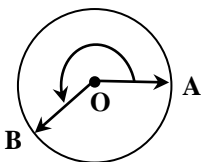
مثال: زاویه‌های 60° ، 210° ، 405° و -150° را روی نمودار مشخص کنید؟

حل:



واحد دایره‌ای برای زاویه:

اگر متحرکی از نقطه‌ی **A** روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان **B** برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره‌خط **OA** حول **O** برحسب رادیان می‌نامند. اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.



چون می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع **R** برابر $2\pi R$ است، لذا اگر ما کمانی از دایره به اندازه‌ی θ را طی کنیم، مسافت طی شده توسط متحرک یا همان طول کمان برابر است با: $L = R\theta$ (دقت کنید در این رابطه θ حتماً باید با واحد رادیان بیان شود). حال اگر دایره مثلثاتی را در نظر بگیریم (دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) محیط این دایره برابر 2π رادیان است، لذا می‌توان واحدهای درجه و رادیان را به صورت زیر بهم تبدیل نمود:

رادیان	درجه	
2π	360°	} $\rightarrow x = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
x	1	

یعنی ۱ درجه برابر $\frac{\pi}{180}$ رادیان است در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow R = \frac{\pi}{180} D$$

↓ ↓
رادیان درجه

مثال: انتهای کمان زاویه‌ی ۷- رادیان در کدام ربع است؟

حل:

مثال: اگر چرخ و فلکی ۴۰ کابین داشته باشد و در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت روی کابین ۳ قرار داشته

باشیم، پس از $\frac{47\pi}{10}$ رادیان دوران در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیریم؟

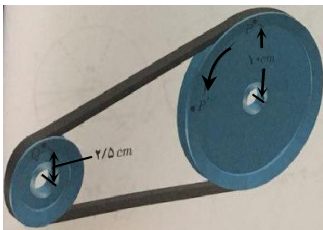
حل:

مثال: در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های ۱۰cm و $2/5$ cm را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی

قرقره‌ی بزرگ‌تر $\frac{\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره‌ی کوچک‌تر چند رادیان

می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} \approx 3/14 \text{ rad}$)

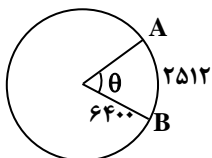
حل:



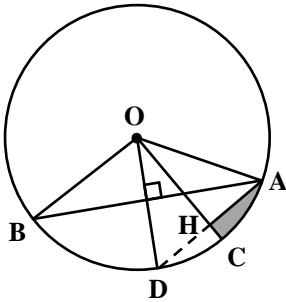
مثال: فاصله‌ی دو نقطه روی کره‌ی زمین که روی یک نصف‌النهار قرار دارند ۲۵۱۲ کیلومتر است. اگر شعاع کره‌ی زمین

تقریباً ۶۴۰۰ کیلومتر باشد زاویه‌ی مرکزی رو به این کمان چند درجه است؟ ($\pi \approx 3/14$)

حل:

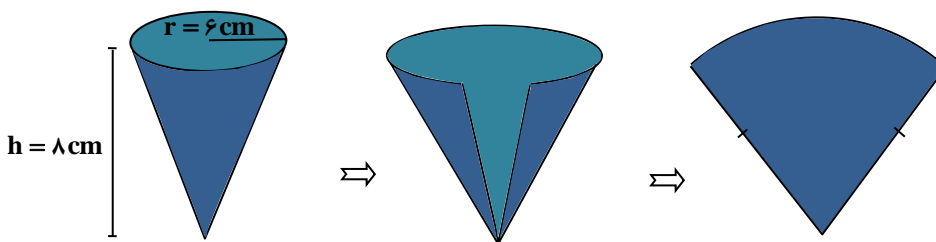


مثال: مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\widehat{AOB} = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه‌زده شده کدام است؟



حل:

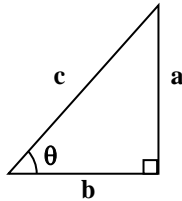
مثال: شکل فضایی و نیز شکل گسترده‌ی یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده‌ی مخروط $r = 6\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8\text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه‌ی قطاع حاصل از شکل گسترده‌ی این مخروط چند رادیان است؟ مساحت این گسترده‌ی جانبی چقدر است؟



حل:

سینوس و کسینوس یک زاویه:

نسبت ضلع مقابل یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه سینوس آن زاویه می‌نامند. همچنین نسبت ضلع مجاور به یک زاویه به وتر را در مثلث قائم‌الزاویه کسینوس آن زاویه می‌نامند.



$$\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دامنه‌ی تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر \mathbb{R} است.

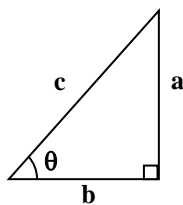
چون همواره $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ و $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ است، لذا $|\sin x| \leq 1$ و $|\cos x| \leq 1$ پس:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

تانژانت و کتانژانت یک زاویه:

بنابر تعریف تانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:



$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

دامنه‌ی تابع تانژانت $D = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ است.

نکته: در واقع می‌توان گفت شیب یک خط، تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور x ها است.

بنابر تعریف کتانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{b}{a}$$

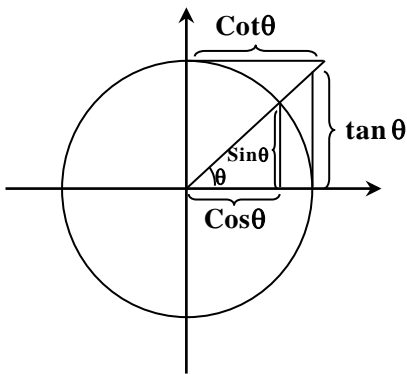
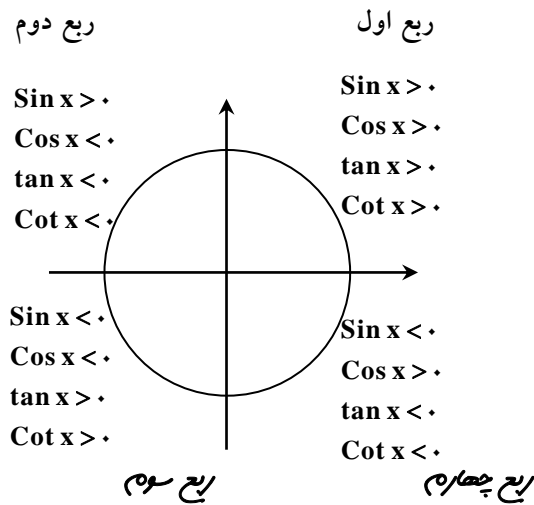
دامنه‌ی تابع کتانژانت $D = \mathbb{R} - [k\pi \mid k \in \mathbb{Z}]$ است.

لذا برای $x \neq \frac{k\pi}{2}$ داریم: $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ یا $\tan x \cdot \cot x = 1$

سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت زوایای مهم:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
Cot x	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

علامت توابع مثلثاتی در ربع‌های مختلف:

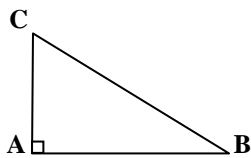


نمایش هندسی توابع مثلثاتی روی دایره‌ی مثلثاتی:

اگر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ (دایره‌ی مثلثاتی) را داشته باشیم، توابع مثلثاتی را می‌توان روی این دایره نمایش داد.

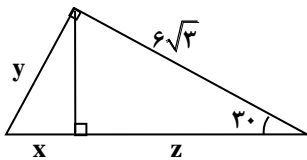
تیب اول:

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC اگر $A = 90^\circ$ و $\tan B = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos C$ چه عددی است؟



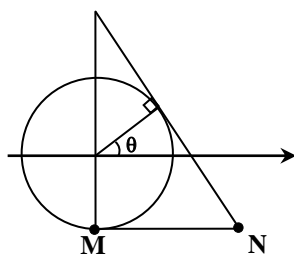
که حل:

مثال: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل x, y, z کدام است؟

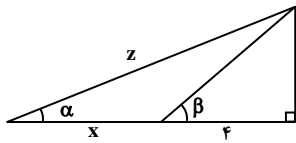


که حل:

مثال: در دایره‌ی مثلثاتی اگر $\theta = 30^\circ$ ، اندازه‌ی MN چقدر است؟



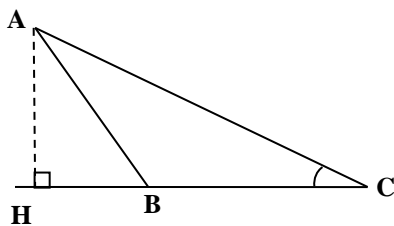
که حل:



مثال: در شکل مقابل $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cot \beta = \frac{1}{4}$ مقدار x کدام است؟

حل:

مثال: در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

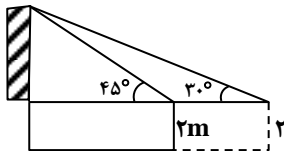


حل:

مثال: شخصی با قد ۲m به بالای برجی نگاه می‌کند. در این حالت بالای برجی را با زاویه 45° می‌بیند، اگر ۱۰m عقب

برود بالای برج را با زاویه 30° می‌بیند. ارتفاع برج چه عددی است؟

حل:



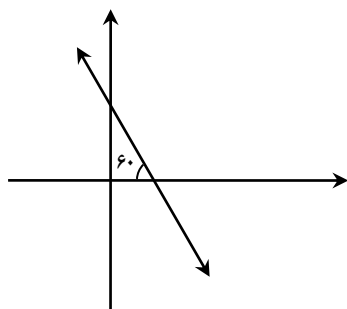
مثال: ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رویت انتها و ابتدای

مجسمه با سطح افق 45° و 40° درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ($\tan 40^\circ = 0.8$)

حل:

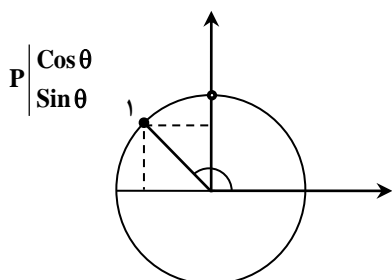
تیپ دوم:

مثال: خط مقابل از نقطه $\left| \frac{1}{2} \right|$ می‌گذرد. این خط محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟



حل:

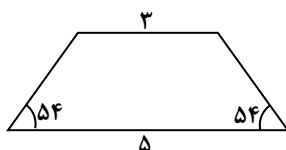
مثال: نقطه‌ی $(1, 0)$ را به اندازه‌ی $\frac{2\pi}{3}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی حاصل کدام است؟



حل:

مثال: مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین که دو قاعده‌ی آن ۳ و ۵ و یکی از زوایای آن ۵۴ است، چه عددی است؟

$$(\cos 54^\circ = 0.6)$$



حل:

تیپ سوم:

مثال: اگر $\sin x + \sin x \cos x < 0$ و $\tan x + \cot x > 0$ در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی واقع است؟

حل:

مثال: اگر $\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha}$ و $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

حل:

روابط توابع مثلثاتی در کمان‌های مثلثاتی مختلف با هم:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(k\pi + \theta) = \cot \theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta \rightarrow \sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$ $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta \rightarrow \cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(2\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

نویس اول:

مثال: حاصل عبارت $\tan(285) \tan(-165) - \sin(1095) \cos(255)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

حل:

مثال: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 225^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = 1/28$ ، کدام است؟

حل:

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ ، با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ ، کدام است؟

حل:

مثال: حاصل عبارت $\frac{3 \cos(248^\circ) - 2 \sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)}$ کدام است؟

۲/۵ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۰/۵ (۲)

۰/۵ (۱)

حل:

نویس (۲۰۰):

مثال: حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ ، کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ کدام است؟

حل:

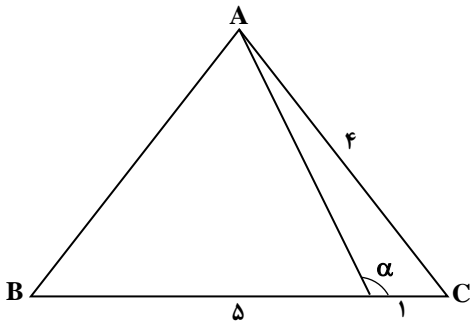
مثال: حاصل $\cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{2\pi}{20} + \cos \frac{3\pi}{20} + \dots + \cos \frac{20\pi}{20}$ کدام است؟

حل:

تیب سوم:

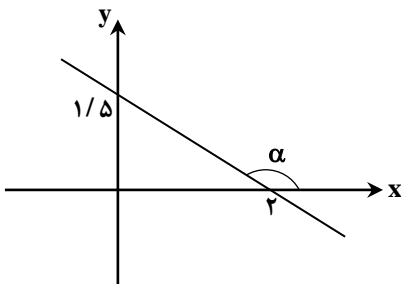
مثال: در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

حل:



مثال: در شکل زیر، زاویه α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ کدام است؟

حل:



اتحادیه‌های مثلثاتی مهم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \quad \theta \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \theta \neq k\pi$$

تذکر: $\sin^2 \theta$ به معنای $(\sin \theta)^2$ است و با مقدار $\sin(\theta)^2$ متفاوت است.

روابط $\alpha + \beta$:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \alpha \pm \beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) \quad \frac{\pi}{4} \pm \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

روابط 2θ :

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \rightarrow \begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \\ \tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \theta \neq k \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\cot \theta + \tan \theta = \frac{2}{\sin 2\theta} \quad \theta \neq k \frac{\pi}{4}$$

$$\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta \quad \theta \neq k \frac{\pi}{4}$$

روابط 3θ :

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

تیب اول:

مثال: اگر $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

(۴) $\frac{1}{3-a}$

(۳) $\frac{1}{a-3}$

(۲) $\frac{1}{4-a}$

(۱) $\frac{1}{a-4}$

حل:

مثال: اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟
 حل:

تیب (روم):

مثال: ساده‌شده‌ی کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$ کدام است؟
 حل:

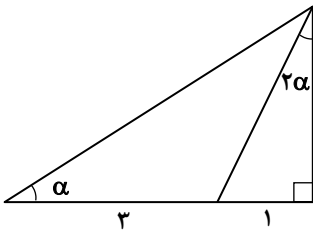
مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، $\tan 2x$ کدام است؟
 حل:

مثال: حاصل عبارت $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$ کدام است؟
 حل:

مثال: اگر بدانیم $\cos^2 x + \cos 2x = \sin^2 x + \sin 2x$ حاصل $\tan x$ کدام است؟
 حل:

مثال: حاصل عبارت $\frac{\sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟
 حل:

مثال: در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟
 حل:



مثال: حاصل عبارت $\sin 7/5^\circ \sin 97/5^\circ \cos 15^\circ$ چقدر است؟
 حل:

مثال: اگر α زاویه‌ای در بازه‌ی $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.
 حل:

مثال: اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟
 حل:

مثال: اگر بدانیم $\tan x - \cot x = 5$ حاصل $\tan 2x - \cot 2x$ کدام است؟

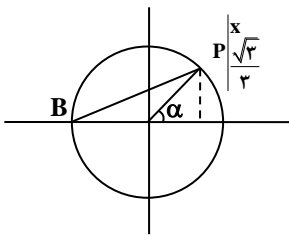
حل:

مثال: اگر $\cot 35^\circ = k$ باشد، حاصل $\cos 20^\circ$ کدام است؟

حل:

مثال: در دایره مثلثاتی شکل مقابل شیب خط BP کدام است؟

حل:



مثال: ساده‌شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ، کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، حاصل $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha}$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\frac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2$ آن‌گاه مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $f(x) = 32\cos^2(x)\cos^2(2x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $f(\alpha) = 4\sin(\alpha)\cos(2\alpha) + 2\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$ کدام است؟

حل:

نویس سوم:

مثال: حاصل عبارت $\sin 16^\circ + \cos 16^\circ \times \tan 37^\circ$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\tan(a+b) = \frac{1}{3}$ و $\tan(a-b) = \frac{1}{4}$ مقدار $\tan 2a$ کدام است؟

حل:

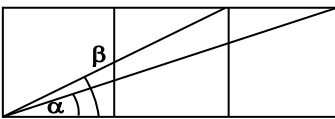
مثال: اگر بدانیم $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$ حاصل $\tan\theta$ کدام است؟

حل:

مثال: اگر $\frac{\sin^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x} = 1$ باشد، حاصل $\cos^2 x$ کدام است؟

که حل:

مثال: در شکل مقابل سه مربع یکسان کنار هم قرار گرفته‌اند، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟



که حل:

مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\sin \beta = \frac{8}{17}$ ، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟ (α و β حاده‌اند)

که حل:

مثال: در صورتی که $\tan(\alpha + 15) = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\cot(60 - 2\alpha)$ کدام است؟

که حل:

مثال: حاصل عبارت $(3\cos 4x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

حل:

مثال: اندازه زاویه A در مثلث ABC ، 45 درجه بیشتر از اندازه زاویه B است. حاصل $2\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

حل:

مثال: اندازه زاویه B در مثلث ABC ، 2 برابر اندازه زاویه A است. حاصل $2\sin A \cos B - \sin C$ با کدام مورد برابر است؟

(۱) $-\sin A$ (۲) $-\sin B$ (۳) $\sin B$ (۴) $\sin A$

حل:

مثال: در مثلث ABC ، اگر $\tan(B-C) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B \cos C}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\tan B$ (۴) $\tan C$

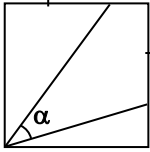
حل:

مثال: خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

حل:

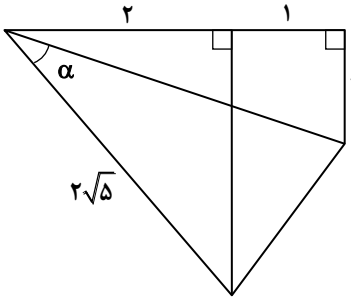
مثال: در مربع شکل مقابل مقدار $\cos\alpha$ چه قدر است؟ (هر ضلع مربع به سه قسمت مساوی تقسیم شده است.)

حل:



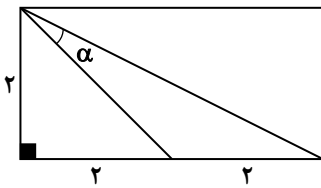
مثال: در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟

حل:



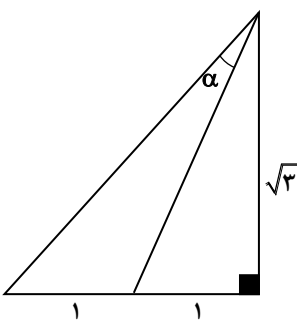
مثال: در شکل زیر، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

حل:



مثال: در شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

حل:



تیپ (۳۵):

مثال: ماکسیمم و مینیمم و برد توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$۲) y = 1 + \sin^2 x \cos^2 x$$

$$۳) y = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$$

$$۴) y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} \quad \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$۴) y = \sin^2 x - \cos x + 5$$

$$۵) y = ۲ \sin x - ۲\sqrt{۲} \cos x$$

$$۶) y = \sin x + \cos x \quad [۰, \pi]$$

$$۸) y = |\sin x| + |\cos x|$$

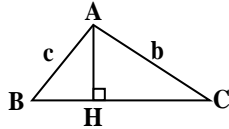
$$۹) y = [\sin x] + [\cos x]$$

مثال: فرض کنید برد تابع $f(x) = \sqrt[۳]{9\cos^2(x)-1} - \sqrt[۳]{1-9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b-a$ کدام است؟
 که حل:

کاربردهای از مثلثات:

قضیه سینوس‌ها:

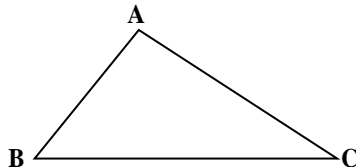
در هر مثلث داریم:



$$BC = BH + HC$$

$$\rightarrow a = c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C}$$

لذا در هر مثلث داریم:



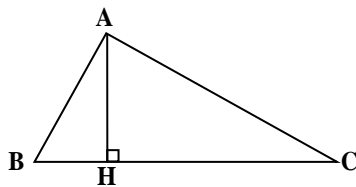
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

مساحت مثلث و قضیه سینوس‌ها:

در مثلث ABC مساحت مثلث برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$AH = AB \times \sin B = AC \times \sin C \quad \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} AC \times BC \sin C$$

$$\rightarrow AB \sin B = AC \sin C \rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

با نوشتن این رابطه با یکی دیگر از ارتفاع‌ها و اثباتی مشابه داریم: $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$

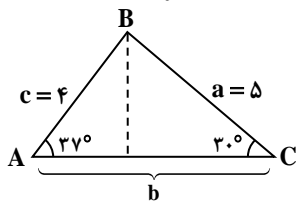
پس: این قضیه را قضیه سینوس‌ها می‌نامند.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نتیجه: مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a و b و زاویه بین θ عبارتست از: $S = ab \sin \theta$

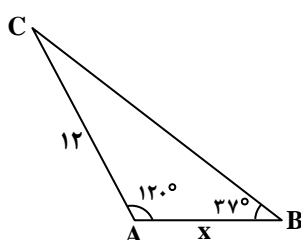
مثال: زمینی مثلث شکل برای ساخت یک فروشگاه زنجیره‌ای در نظر گرفته شده است. محیط این زمین کدام است؟

($\cos 37^\circ = 0.8$ و $\cos 30^\circ = 0.86$)



حل:

مثال: شکل کلی یک زمین گلف به صورت زیر است. مساحت این زمین چقدر است؟ ($\sin 37^\circ \approx 0.6$ و $\sin 23^\circ \approx 0.4$)

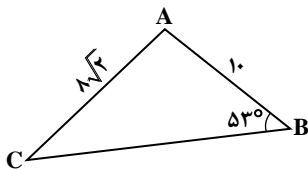


حل:

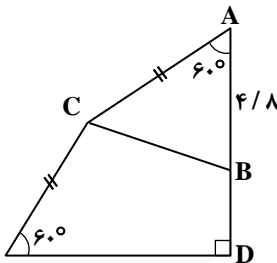
مثال: اگر در مثلث غیر متساوی‌الساقینی رابطه‌ی $a^3 - b^3 = c^2(a-b)$ برقرار باشد، زاویه‌ی C کدام است؟
حل:

مثال: در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه‌ی ضلع AC کدام است؟
حل:

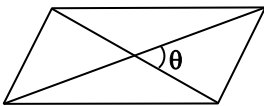
مثال: در مثلث شکل مقابل، طول BC کدام است؟ $(\sin 53^\circ = 0.8)$
حل:



مثال: در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $7/2\sqrt{3}$ است. فاصله‌ی D از C کدام است؟
حل:



مثال: اندازه‌ی دو قطر متوازی‌الاضلاعی 12 و $8\sqrt{3}$ است. اگر مساحت آن 72 باشد، زاویه‌ی بین دو قطر چقدر است؟
حل:



مثال: در یک مثلث، زاویه‌ی بین دو ضلع با اندازه‌های 5 و 12 برابر α است. اگر مساحت این مثلث 15 باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟
حل:



مثال: در شکل زیر مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده؟

حل:

مثال: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

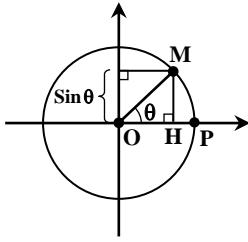
حل:

مثال: در یک لوزی، اندازه هر ضلع برابر جذر حاصل ضرب طول قطرهای آن است. اگر A و B دو زاویه مجاور لوزی باشند،

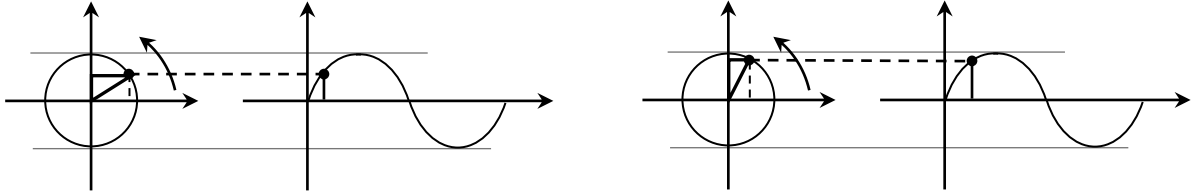
مقدار مثبت تانژانت $(\frac{A-B}{۲})$ کدام است؟

حل:

ارتباط بین دایره‌ی مثلثاتی و تابع سینوس:



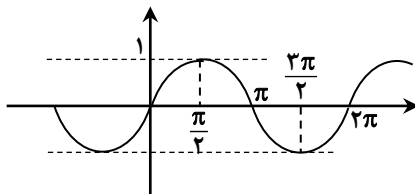
اگر نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی حرکت کند، مقدار y نقطه در هر لحظه، برابر مقدار سینوس زاویه‌ای است که نقطه با مبدأ و محور x می‌سازد. در واقع تصویر متحرک M روی محور y ها برابر با سینوس زاویه در هر لحظه است.
* یعنی حرکت تصویر M روی محور y ها با تابعی سینوس صورت می‌پذیرد.



توابع مثلثاتی و نمودارشان:

بسیاری از حرکات متناوب در طبیعت با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

توابع $y = \text{Sin } x$, $y = \text{Cos } x$, $y = \text{tan } x$, $y = \text{Cot } x$ توابع مثلثاتی نام دارند و دامنه و برد و نمودارشان به صورت زیر است:
(الف)



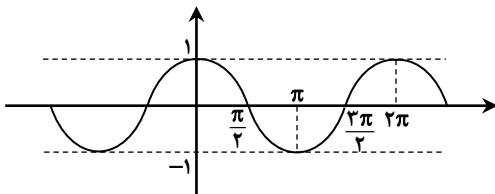
$$y = \text{Sin } x$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

* صفرهای (ریشه‌های) تابع $y = \text{Sin } x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

(ب)



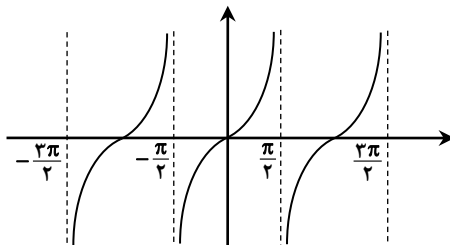
$$y = \text{Cos } x$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

* صفرهای تابع $y = \text{Cos } x$ در $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ رخ می‌دهد.

(ج)



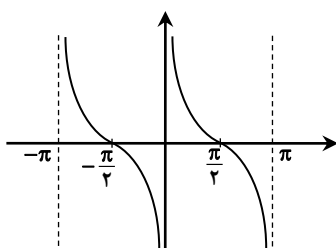
$$y = \text{tan } x$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R = \mathbb{R}$$

* صفرهای تابع $y = \text{tan } x$ در $x = k\pi$ رخ می‌دهد.

(د)



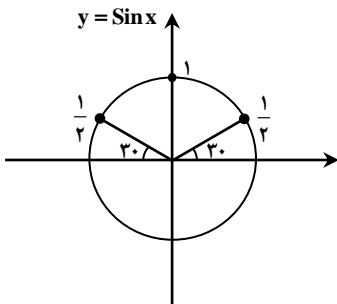
$$y = \text{Cot } x$$

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

تیب اول:

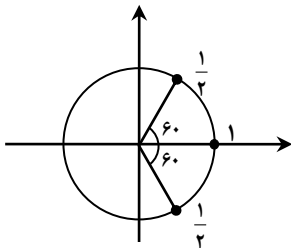
مثال: اگر $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ باشد، محدوده‌ی تغییرات $y = \sin x$ چقدر است؟

حل:



مثال: اگر $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{9}$ باشد، $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد، مقادیر m در کدام فاصله است؟

حل:



مثال: اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

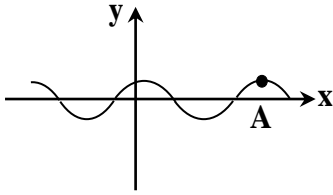
حل:

مثال: اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

حل:

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ است. طول نقطه‌ی A کدام است؟

حل:



تیب (روم):

مثال: اگر $\tan x + \sin x > 0$ و $\sin x - \cos x > 0$ محدوده‌ی تغییرات x کدام است؟

حل:

مثال: فقط چهار عدد از بازه $(-a^2 - 2, 4)$ در دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ قرار ندارند. مجموعه‌ی مقادیر ممکن برای $|a|$

کدام است؟

حل:

مثال: مجموع اعداد صحیحی که در دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan(\pi x) \sqrt{4x - x^2}$ قرار دارند، کدام است؟

حل:

توابع متناوب:

حرکاتی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند، حرکت متناوب می‌نامند.

تابع f را متناوب می‌نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$(x, x+T \in D_f) \quad f(x+T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد T با خاصیت بالا را دوره‌ی تناوب می‌نامند.

نکات:

۱- چون $\sin(x+2\pi) = \sin x$ تابع $y = \sin x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

۲- چون $\cos(x+2\pi) = \cos x$ تابع $y = \cos x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

۳- چون $\tan(x+\pi) = \tan x$ تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

۴- چون $\cot(x+\pi) = \cot x$ تابع $y = \cot x$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

۵- دوره تناوب توابع $f(x) = \cos(ax+b)$, $f(x) = \sin(ax+b)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

و دوره تناوب توابع $f(x) = \cot(ax+b)$, $f(x) = \tan(ax+b)$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

نکته: توابع $y = A\cos(ax+b)$ و $y = A\sin(ax+b)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T = \frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشند.

۶- دوره تناوب توابع: $f(x) = |\cos ax|$, $f(x) = |\sin ax|$, $f(x) = \cos^2 ax$, $f(x) = \sin^2 ax$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.

۷- دوره تناوب تابع $f(x) = nx - [nx]$ و $f(x) = [nx] + [-nx]$ برابر $T = \frac{1}{n}$ است.

نیمه اول:

مثال: دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{4} - \sin \frac{2x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟

حل:

مثال: کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب مثبت تابع $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos^2 x + \sin(x + \frac{\pi}{4})\sin x$ برابر کدام است؟

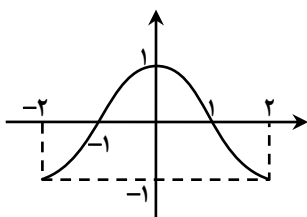
حل:

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \tan \pi x - \cot \pi x$ چند برابر دوره‌ی تناوب $g(x) = \tan \pi x + \cot \pi x$ است؟
حل:

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \tan 2x \cot 2x$ کدام است؟
حل:

مثال: اگر دوره‌ی تناوب تابع $y = f(x)$ برابر ۲ باشد، دوره‌ی تناوب تابع $y = 2f\left(\frac{x}{3}\right) + 1$ کدام است؟
حل:

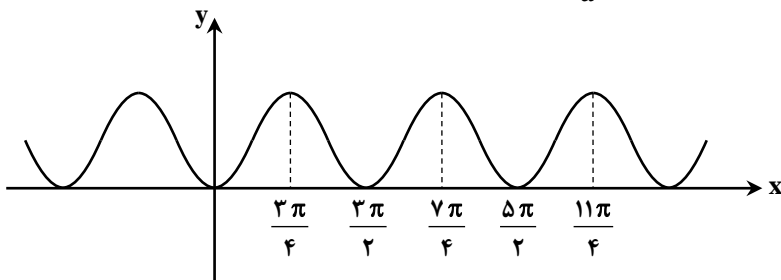
مثال: اگر تابع f متناوب با دوره‌ی تناوب ۴ و در یک دوره‌ی تناوب نمودار آن به صورت زیر باشد، حاصل $f(1) + f(-1)$ کدام است؟



حل:

حل:

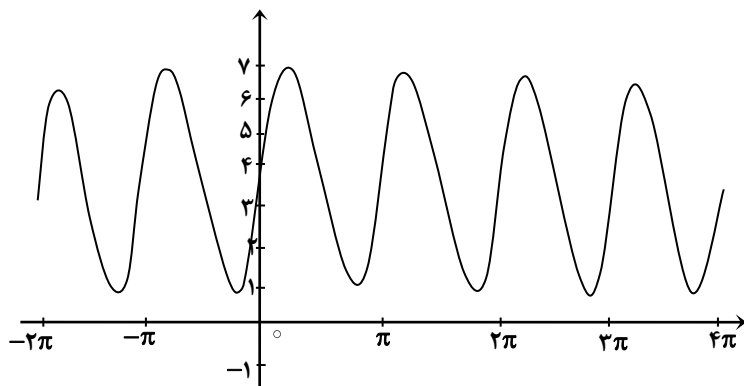
مثال: شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + \sin ax$ است. دوره‌ی تناوب $y = 3 \cos\left(\frac{x}{a}\right)$ کدام است؟



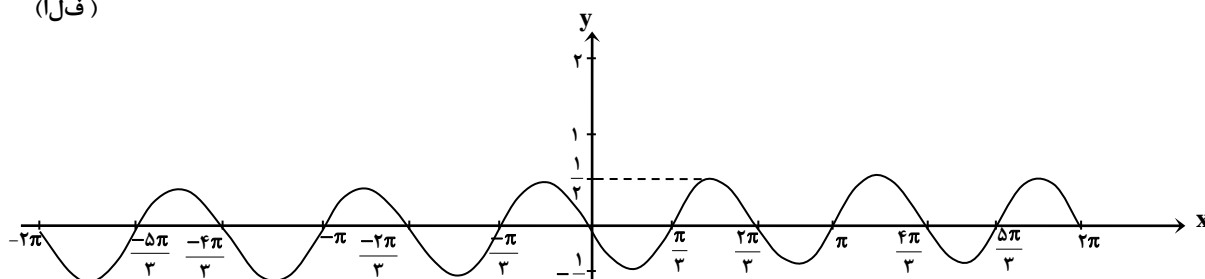
تیپ دوم :

مثال: هریک از نمودارهای داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin(bx) + c$ یا $f(x) = a \cos(bx) + c$ است. a و b و c را به دست آورید.

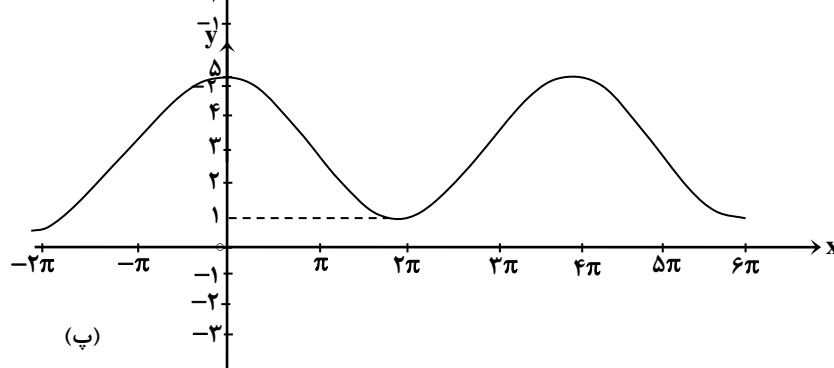
حل:



(الف)



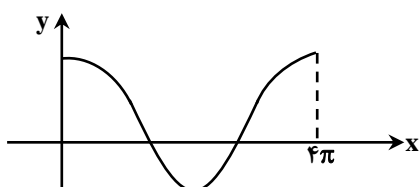
(ب)



(پ)

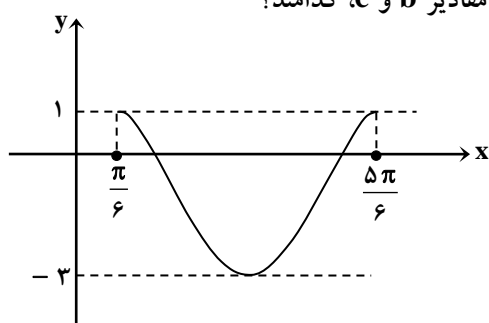
مثال: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{3} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

حل:

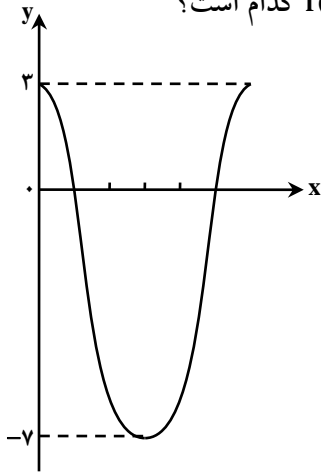


مثال: شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه‌ی تناوب است. مقادیر b و c ، کدامند؟

حل:

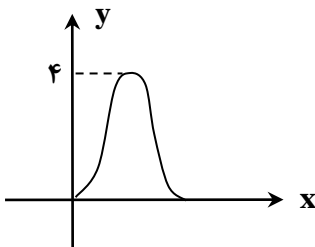


مثال: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد، مقدار $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟



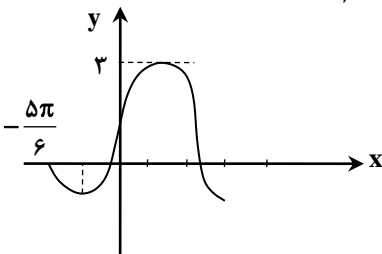
حل:

مثال: شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟



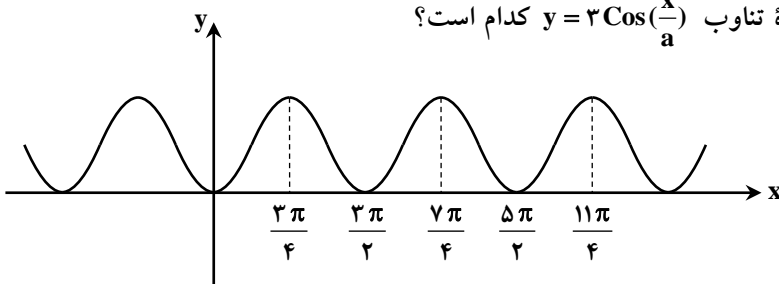
حل:

مثال: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

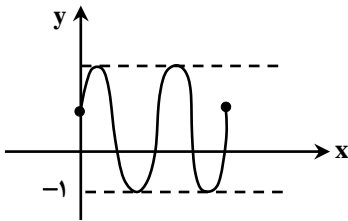


حل:

مثال: شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + \sin ax$ است. دوره تناوب $y = 3 \cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟



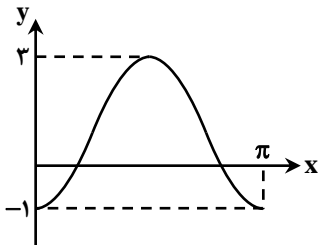
مثال: شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه‌ی $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟



حل:

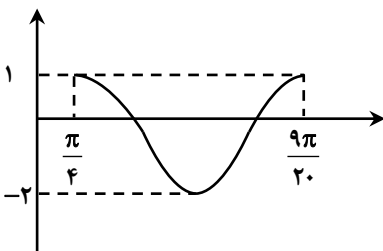
مثال: اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در

بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟



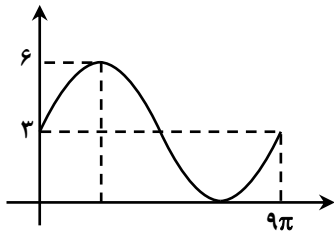
حل:

مثال: شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



حل:

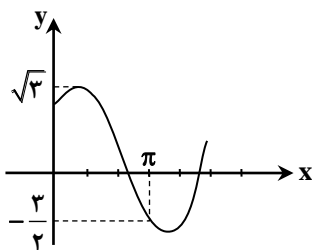
مثال: اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{2\pi}{4})}$ باشد، مقدار $f(\frac{2\pi}{4})$ کدام است؟



حل:

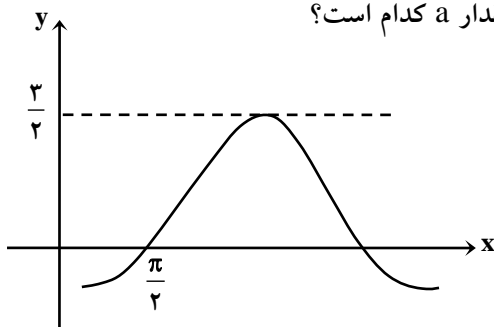
نوع رسم:

مثال: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟



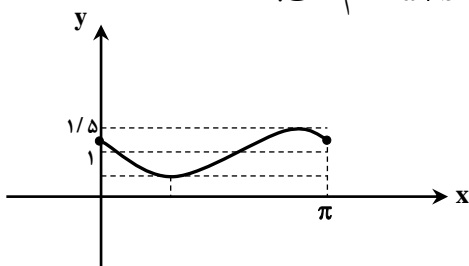
حل:

مثال: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a کدام است؟



حل:

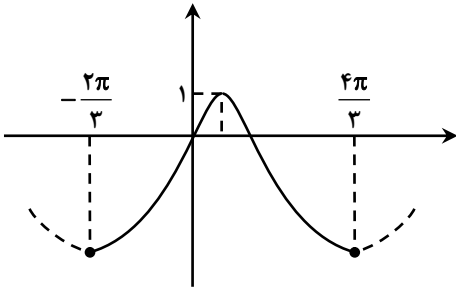
مثال: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. a + b کدام است؟



حل:

مثال: شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b\cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right)$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c-a)$ کدام است؟

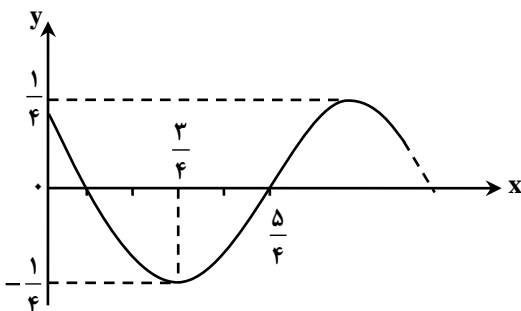
کحل:



مثال: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx+c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$

کدام است؟

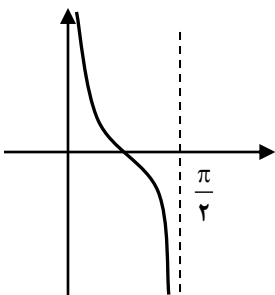
کحل:



نید سوم:

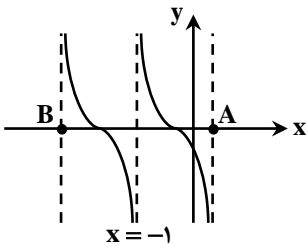
مثال: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)$ است. a کدام است؟

کحل:



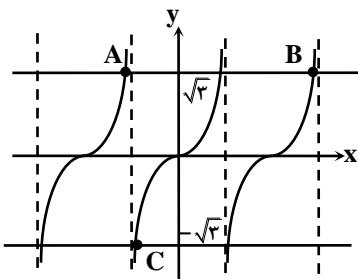
مثال: بخشی از نمودار تابع $y = \tan\left(ax - \frac{\pi}{3}\right)$ به صورت شکل زیر است. طول پاره خط AB کدام است؟

کحل:



مثال: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است، اگر مساحت مثلث ABC برابر با $8\sqrt{3}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟

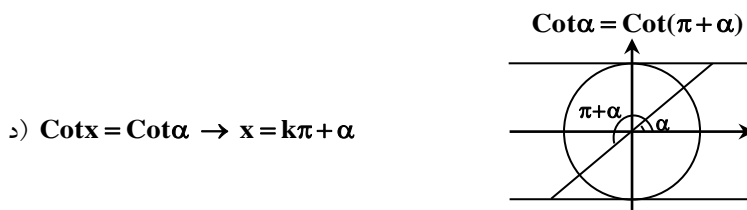
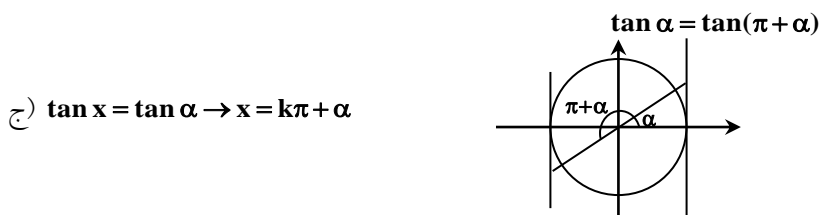
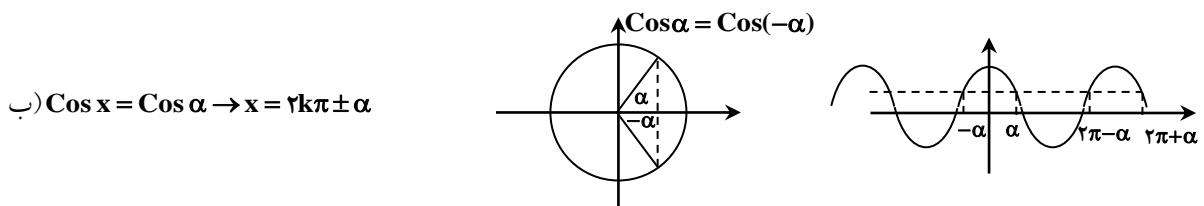
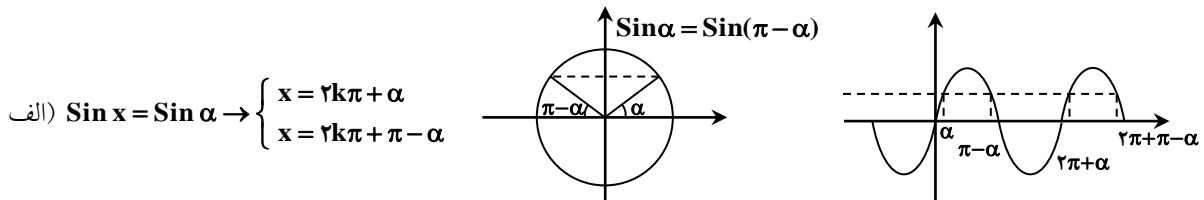
کحل:



معادلات مشتق:

معادلاتی که در آن معادلات، توابع مثلثاتی وجود داشته باشد را معادلات مثلثاتی می‌نامند. شیوه‌ی کلی حل معادله به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی از شکل‌های $\sin x = \sin \alpha$ یا $\cos x = \cos \alpha$ یا $\tan x = \tan \alpha$ در بیاوریم.

در هر حالت جواب‌های کلی به صورت زیر است:



معادلات مشتق در حالات خاص: (در حالاتی که ریشه‌ها مضاعف اند یا نقاط تلاقی با محور x ها)

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \\ \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cot x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$2 \tan x \cos^2 x = 1$$

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x \cdot \tan 2x = 1$$

$$\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\sin 3x = \sin 2x$$

$$\cos 2x = \cos x$$

$$\tan 4x = \cot \left(4x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\sin 2x = \tan x$$

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

$$\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

$$\tan x + \tan 2x = \tan 3x$$

$$\tan^2 x - \cos 2x = 1$$

$$1 + \sin 2x = 2(\sin x + \cos x) - 2$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2 \tan x - \cot x = 2$$

$$\cos^2 x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2 = 0$$

$$2 \cos 2x = \cot x (2 \sin x + \tan x)$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\tan(3x) \tan(x) = 1$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$$

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌های زیر در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos x - \tan^2 x = 1$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x$$

$$\sin 2x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$$

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$$

$$\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\cos 2x \sin(2\pi - x) - \sin 2x \cos(\pi + x) = \cos \frac{2\pi}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$2\sin(x)\cos(2x) + \sin(x) = 1$$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{8} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$$

$$\Delta \sin^7(x) + 2\cos(3x) = -2$$

$$\cos^7(x) - \sin^7(x)\cos(3x) = 1$$

تیپ دوم :

مثال: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر ۷۲ واحد مربع است. چند مثلث با این ویژگیها می توان ساخت ؟

حل:

مثال: نقاط انتهایی کمان‌های جواب معادله $\cos 2x \sin x = \cos 2x$ روی یک دایره‌ی مثلثاتی رئوس چه شکلی می باشند؟

حل:

مثال: نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چندضلعی است؟

حل:

مثال: کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب‌های معادله $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ کدام است؟

حل:

مثال: در معادله مثلثاتی $1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos x + m\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ اگر $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

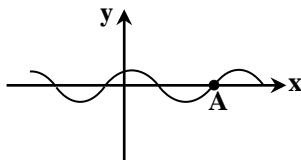
حل:

مثال: اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

حل:

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ است. طول نقطه‌ی A کدام است؟

حل:



مثال: نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{4}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

حل:

مثال: تابع $f(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$ در نقطه‌ای با کدام طول دارای بیشترین مقدار است؟

حل:

مثال: معادله $(\sin x - \frac{1}{4})(\sin x + \frac{1}{4})(\sin x - \frac{1}{4}) = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ دارای چند ریشه است؟

حل: