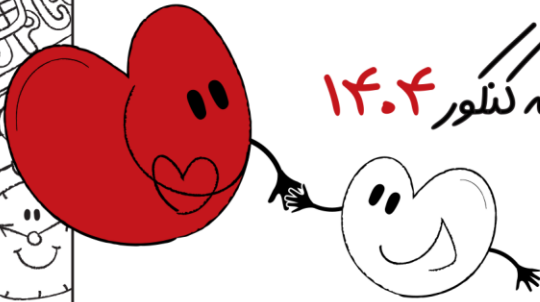


با ❤️ بیا تام لند

جزوه

دوره سالانه نئور ۱۴۰۴



حسابان

جزوه شماره ۱
اتحادها و تجزیه

دکتر محمد سجاد نقیه

 naghiyeh

 Sajad.naghiyeh

اتحادها و تجزیه

در این بخش می‌خواهیم باد و مفهوم اتحاد و تجزیه و همچنین کاربردهای آن‌ها آشنا شویم. دقت کنید که هر چند احتمال طرح سؤال به صورت مستقیم از این بخش زیاد نیست اما این بخش یکی از پایه‌های مهم ریاضی است که می‌تواند در تمامی بخش‌های دیگر نیز استفاده و ترکیب شود.

۱ اتحادها

یادآوری

♦ تک‌جمله‌ای:

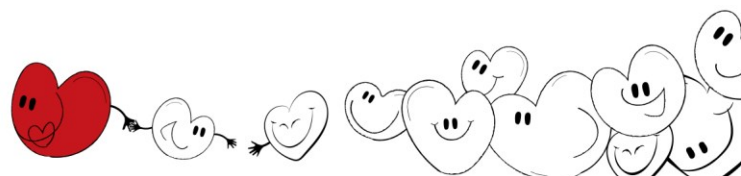
♦ چندجمله‌ای:

♦ درجه یک چندجمله‌ای:

$$\sqrt{(x^2 - 6xy)^2}$$

مثال

اتحاد: در ریاضیات به یک معادله همواره درست، یک اتحاد می‌گوییم که معمولاً برای ساده‌سازی فعالیت‌های جبری به کار می‌رود.



مثال ۱ با توجه به اتحاد $x(x^2 - 6x + c) = (ax - 6)(x^2 + b)$ حاصل $a + b - c$ را بیابید.

توجه در اینجا قرار است با یکسری اتحادهای جبری آشنا شویم که به طور معمول در آن‌ها ضرب چند عبارت به صورت یک عبارت با درجه بالاتر بیان می‌شود.

تیپ ۱

اتحادهایی که درجه عبارات را دو برابر می‌کنند.

اتحاد مربع دو جمله‌ای

شرایط استفاده

الف) ضرب کردن یک دو جمله‌ای در خودش

ب) به توان دو رساندن یک دو جمله‌ای

فرم کلی

$$(\square + \circ)^2 = \square^2 + \circ^2 + 2\square\circ$$

$$(\square - \circ)^2 = \square^2 + \circ^2 - 2\square\circ$$

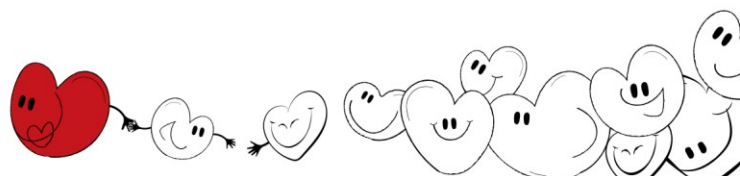
مثال

$$(1 - 2x)^2 = 1 + 4x^2 - 4x$$

$$(\sqrt{x} + y^2)^2 = x + y^4 + 2y^2\sqrt{x}$$

$$(3\sin x - \cos x)^2 = 9\sin^2 x + \cos^2 x - 6\sin x \cos x$$

$$(3^x + 2^x)(3^x + 2^x) = 9^x + 4^x + 2(6)^x \text{ یا } 3^{2x} + 2^{2x} + 2(6)^x$$



مثال ۲ الف اگر $x + y = 5$ و $xy = 3$ باشد مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

ب اگر $3x - 2y = 4$ و $6xy = 3$ باشد مقدار $9x^2 + 4y^2$ کدام است؟

پ اگر $2\sqrt{x} + 3y = 8$ و $\sqrt{xy} = 2$ باشد مقدار $4x + 9y^2$ کدام است؟

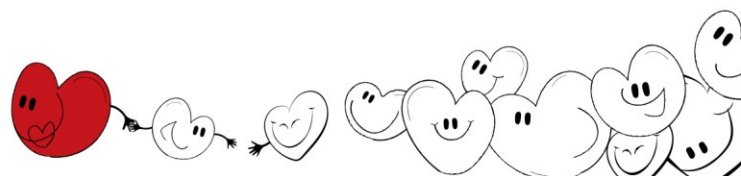
مثال ۳ الف اگر $a + b = 7\sqrt{ab}$ باشد حاصل $\frac{a^2 + b^2 + 3ab}{a^2 + b^2 - 42ab}$ کدام است؟

ب اگر $x = \sqrt{2} + 2$ باشد حاصل $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3}$ کدام است؟

تست ۴ اگر عبارت $3xy^2 + 3yx^2 + A$ یک عبارت مربع کامل باشد مقدار A کدام می‌تواند باشد؟

۱ $-6\sqrt{x^3y^3}$ ۲ $3\sqrt{x^3y^3}$

۳ $-2\sqrt{x^2y^3}$ ۴ $\sqrt{x^2y^3}$



مثال ۵ الف اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

ب اگر $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ باشد حاصل $\sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 4}$ کدام است؟

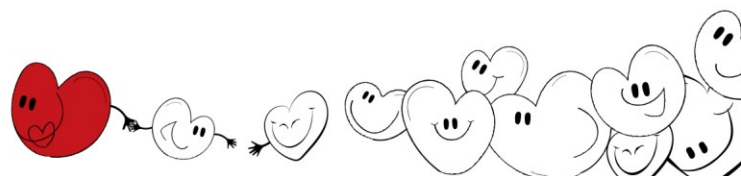
پ اگر $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 4$ باشد مقدار $x + \frac{4}{x}$ کدام است؟

ت اگر $\sqrt{x} - \frac{3}{x} = 5$ باشد مقدار $x^2 + \frac{81}{x^2}$ کدام است؟

ث اگر $x + \frac{1}{x-2} = 6$ باشد حاصل $(x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2}$ کدام است؟

ج اگر $\frac{x^2-3}{x} = 4$ باشد حاصل $x^2 + \frac{9}{x^2}$ کدام است؟

چ اگر $\frac{x-3x^2-2}{x^2} = 1$ باشد مقدار $\frac{x^4}{x^8+4}$ کدام است؟



از اتحادها در محاسبه اعداد نیز می توان استفاده کرد.

مثال ۶ الف حاصل $(105)^2$ را به دست آورید.

ب حاصل $1 + (999)^2 - (1000)^2$ کدام است؟

تست ۷ اگر $a^2 = 2 - a$ باشد حاصل a^4 بر حسب a کدام است؟

۲ $6 - 5a$

۱ $5a - 6$

۴ $5 - 4a$

۳ $4a - 5$

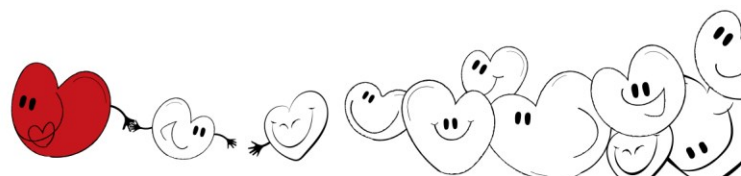
تست ۸ اگر $x^2 = 2x - 1$ باشد و $x^6 = ax + b$ ، حاصل $b - a$ کدام است؟

۲ ۱۱

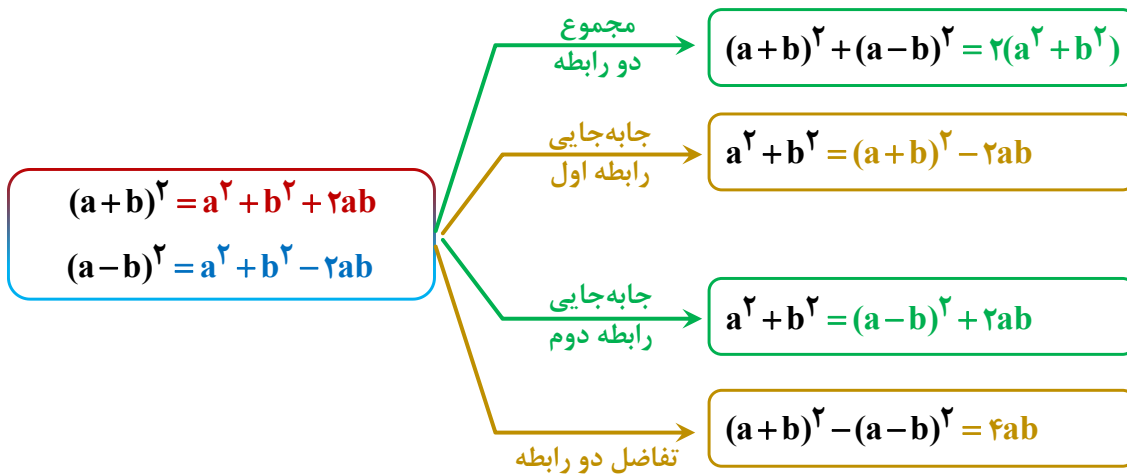
۱ ۱

۴ -۱

۳ -۱۱



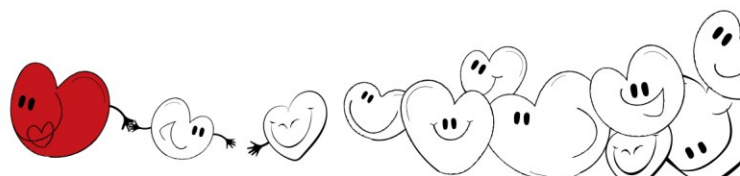
توجه از ترکیب و جابجایی اتحادهای $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ به ۴ فرمول کمکی زیر می‌توان رسید (اتحاد فرعی):



مثال ۹ الف اگر $x+y=11$ و $x^2+y^2=73$ باشد حاصل $x-y$ را به دست آورید.

ب اگر تفاضل دو عدد ۵ و مجموع مربعات آنها ۹۷ باشد جمع این دو عدد را بیابید.

پ اگر $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ باشد و $a-b=4$ ، حاصل $a+b$ را بیابید.



توجه در برخورد با رادیکال‌ها توان به شدت کمک‌کننده است.

۱ ← معمولاً در روابط به فرم $\sqrt{\square \pm 2\sqrt{\square}}$ عبارت زیر رادیکال را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت:

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = \dots = \dots \Rightarrow 3 + 2\sqrt{2} = \dots = \dots \Rightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = ?$$

$$(\sqrt{3} + 1)^2 = \dots = \dots \Rightarrow 4 - 2\sqrt{3} = \dots = \dots \Rightarrow \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = ?$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = \dots = \dots \Rightarrow 5 + 2\sqrt{6} = \dots = \dots \Rightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = ?$$

۲ ← در برخی موارد عبارت زیر رادیکال به فرم یک مربع کامل تبدیل نمی‌شود، در این حالت بهتر است کل عبارت را (کل رابطه را) به توان دو رساند.

مثال ۱۰ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

راه‌حل اول:

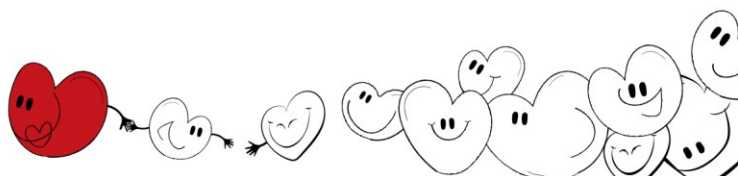
راه‌حل دوم:

ب $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

پ $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$

ت $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

ث $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$



تست ۱۱ حاصل $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱ ۲

۱ ۱

۳ ۴

۳ ۳

تست ۱۲ اگر $2 < x < 3$ باشد حاصل $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۲ ۲

۱ ۱

-x ۴

x ۳

مثال ۱۳ اگر $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3} = 5$ باشد حاصل $x^2 + x$ کدام است؟

مثال ۱۴ حاصل $(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2\sqrt{2}}$ کدام است؟

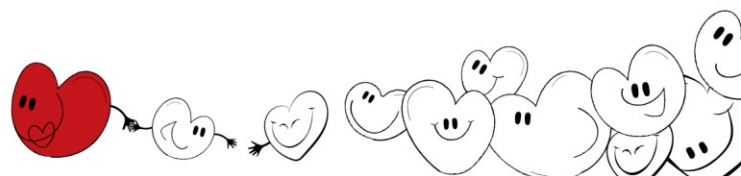
نکته اتحاد مربع دو جمله‌ای را می‌توان برای جملات بیشتر هم تعمیم داد.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

← مربع سه‌جمله‌ای:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

← مربع چهارجمله‌ای:



مثال ۱۵ اگر $x+y+z=3$ و $xy+yz+xz=2$ مقدار $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

مثال ۱۶ برای سه عدد a, b, c با مجموع ۱۱ می‌دانیم مجموع حاصل ضرب دو به دو آنها برابر ۳ است. در این

(فارج ۹۱)

صورت مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

تست ۱۷ اگر $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x} = 5$ باشد مقدار $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^2}$ کدام است؟

۲۱ (۲)

۱۹ (۱)

۲۳ (۴)

۱۸ (۳)

◆ ادامهٔ تیپ ۱

◆ اتحاد مزدوج

شرایط استفاده

الف) ضرب دو جمله‌ای‌هایی که جملات همسان اما یکی از جملات قرینه

ب) به توان دو رساندن جملات یک دو جمله‌ای

● فرم کلی

$$(\square + \circ) = (\square - \circ) = \square^2 - \circ^2$$

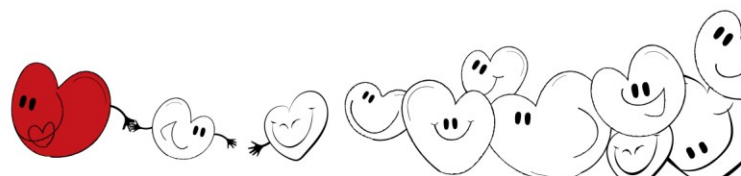
$$(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) = x - 9$$

$$(2y + x^3)(x^3 - 2y) = x^6 - 4y^2$$

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\left(\frac{x}{2^2+1}\right)\left(\frac{x}{2^2-1}\right) = 2^x - 1$$

مثال



مثال ۱۸ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) =$

ب $(2 + \sqrt{3} - 2\sqrt[4]{3})(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt[4]{3}) =$

پ $(\sqrt{7} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{7} - \sqrt{2} + 1) =$

ت $(\sqrt{5} + 1)^2 + 2\sqrt{14}(3 + \sqrt{5} - \sqrt{14}) =$

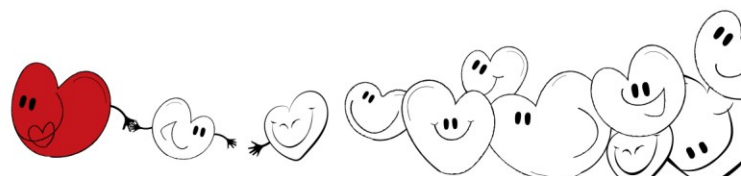
ث $(\sqrt{5} - 2)^2(\sqrt{5} + 2)^3 =$

ج $(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2(\sqrt{6} + \sqrt{7})^5 =$

چ $(\sqrt{2\sqrt{2} + 1})(\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{3}}) =$

ح $\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}}(\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}})\sqrt[3]{4}$

خ $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}}$



مثال ۱۹ اگر $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$ باشد حاصل $\sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ کدام است؟

مثال ۲۰ حاصل $\frac{x-y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})}$ کدام است؟

تست ۲۱ از تساوی $(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^4 = (3-2\sqrt{2})^n$ مقدار n کدام است؟

$\frac{-1}{18}$ **۴**

$\frac{-1}{24}$ **۳**

$\frac{-1}{6}$ **۲**

$\frac{-1}{12}$ **۱**

مثال ۲۲ مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید.

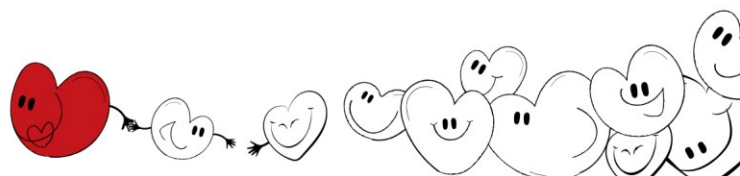
الف $\sqrt{\frac{(208)^2 - (192)^2}{159 \times |6| + 1}} =$

ب $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} =$

راه حل اول :

راه حل دوم :

پ $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^6 =$



تست ۲۳ اگر $\alpha = \sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشد مقدار عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کدام

(سراسری ۱۳۹۸)

است؟

- ۱) ۶
۲) ۸
۳) $6\sqrt{2}$
۴) $7\sqrt{2}$

تست ۲۴ فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ باشد مقدار $(a^2 + b^2 + 2ab)^2 (a^2 + b^2 - 2ab)^2$ کدام

(تجربی ۱۴۰۰)

است؟

- ۱) $4(2 + \sqrt{3})$
۲) $4(2 - \sqrt{3})$
۳) $16(2 + \sqrt{3})$
۴) $16(2 - \sqrt{3})$

ادامه تیب ۱

اتحاد جمله مشترک

شرایط استفاده

ضرب دو جمله‌ای‌ها با یک بخش همانند و مشترک

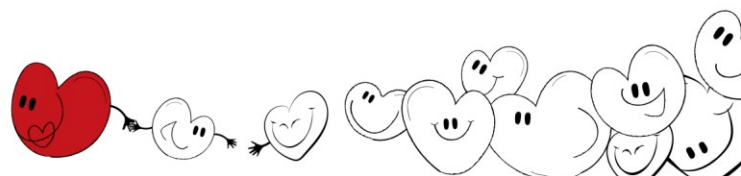
فرم کلی

$$(\square + \circ) = (\square + \triangle) = \square^2 + (\circ + \triangle) \square \times \circ \times \triangle$$

$$(2x-1)(2x+3) = 4x^2 + 4x - 3$$

مثال

$$(3x+3x)(3x-1) = 9x^2 + 6x - 3$$



مثال ۲۵ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱ $(\sqrt{3} - \sqrt{8})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

۲ $(2x+1)(x-3)$

۳ $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})} + 8$

تست ۲۶ حاصل عبارت $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} - \sqrt{2(2a-1)(a + \frac{3}{4})} + 4 + 1$ کدام است؟ $(a < -\frac{1}{4})$

۲ $(a+1)^2$

۱ $a+1$

۴ $a-1$

۳ $(a-1)^2$

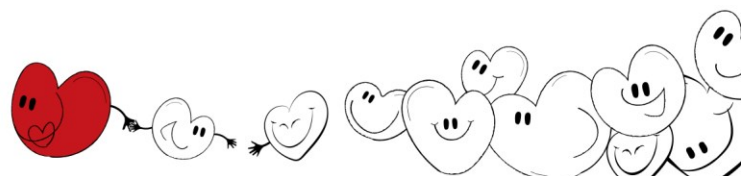
تست ۲۷ اگر $9 = a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$ باشد حاصل $a^2 + 3a$ کدام است؟

۲ -1

۱ 1

۴ -2

۳ 2



تیپ ۲

اتحادهایی که درجه عبارات را سه برابر می کند.

اتحاد مکعب دو جمله‌ای

شرایط استفاده

به توان سه رساندن یک عبارت دو جمله‌ای

فرم کلی

$$(\square + \circ)^3 = \square^3 + 3\square^2\circ + 3\square\circ^2 + \circ^3$$

$$(\square - \circ)^3 = \square^3 - 3\square^2\circ + 3\square\circ^2 - \circ^3$$

مثال

$$(2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

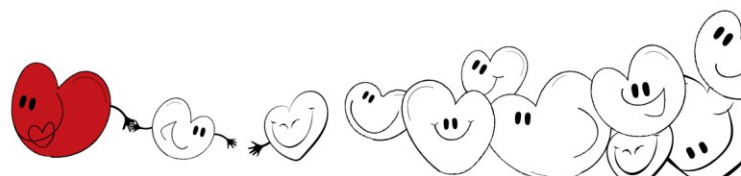
$$(\sqrt{2} + 2)^3 = 2\sqrt{2} + 12 + 12\sqrt{2} + 8 = 10 + 14\sqrt{2}$$

$$(2^x - 1)^3 = 8^x - 3 \times 4^x + 3 \times 2^x = 1$$

مثال ۲۸ حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف $(x+2)^3 - (x-2)^3 =$

ب $(x+2)^3 + (x-2)^3 =$



 نتیجه گیری فرعی

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

مثال ۲۹ اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف $x^2 + \frac{1}{x^2}$

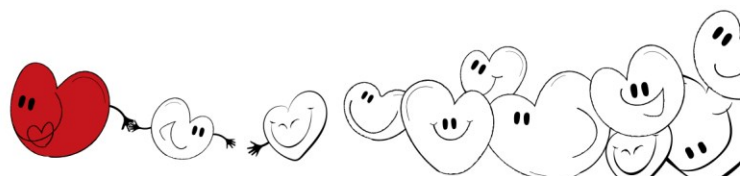
ب $x^3 + \frac{1}{x^3}$

مثال ۳۰ اگر $3x - \frac{2}{x} = 5$ باشد حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف $9x^2 + \frac{4}{x^2}$

ب $37x^3 - \frac{8}{x^3} =$

مثال ۳۱ اگر $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 4$ باشد حاصل $x^3 + \frac{64}{x^3}$ را به دست آورید.



تست ۳۲ اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ باشد حاصل $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۵۲

۲) ۷۶

۳) ۴۶

۴) ۷۲

مثال ۳۳ اگر $x^2y + y^2x = 20$ و $x^3 + y^3 = 65$ باشد مقدار xy را به دست آورید.

مثال ۳۴ اگر $a^3 = 46 + b^3$ و $a - b = \frac{6}{ab}$ باشد حاصل $a - b$ را به دست آورید.

مثال ۳۵ اگر $xy = 27$ و $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$ باشد حاصل $x + y$ کدام است؟

تست ۳۶ اگر $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ باشد حاصل $x^3 - 6x$ کدام است؟

۱) $-6\sqrt{4}$

۲) -6

۳) ۶

۴) $6\sqrt{4}$

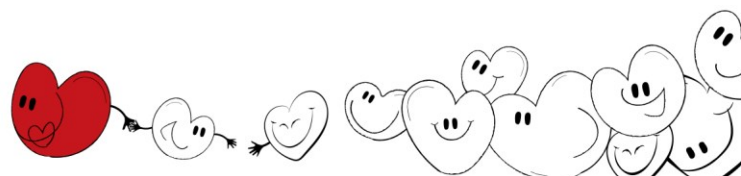
تست ۳۷ اگر $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ باشد مقدار $x^3 - 3x$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶



مثال ۳۸ حاصل $\sqrt[3]{\sqrt{7}+5\sqrt{2}}$ را بیابید.

مثال ۳۹ حاصل $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$ را بیابید.

تست ۴۰ حاصل $(1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱۹۷

۱۹۸

۸۵

۸۴

تست ۴۱ اگر $a = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ باشد مقدار $a^3 + b^3$ کدام است؟

۱۸ $\sqrt{3}$

۹ $\sqrt{3}$

۶۴ $\sqrt{3}$

۲۷ $\sqrt{3}$

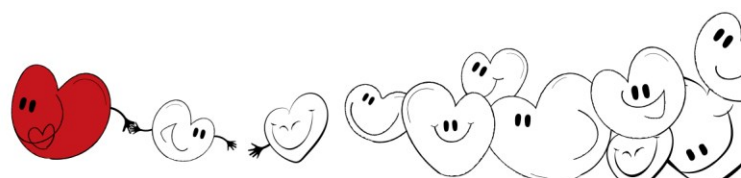
تست ۴۲ اگر $x+y = \frac{2}{x-y}$ باشد حاصل $x^6 - 6x^2y^2 - y^6$ کدام است؟

۲

۱

۸

۴



ادامهٔ تیپ ۲

اتحاد مکعب دو جمله‌ای

شرایط استفاده

هرگاه بخواهیم جملات یک دو جمله‌ای را تکی تکی به توان سه برسانیم

فرم کلی

$$(\square + \circ)(\square^2 - \square \times \circ + \circ^2) = \square^3 + \circ^3$$

$$(\square - \circ)(\square^2 + \square \times \circ + \circ^2) = \square^3 - \circ^3$$

$$(1-x)(x^2+x+1) = 1-x^3$$

مثال

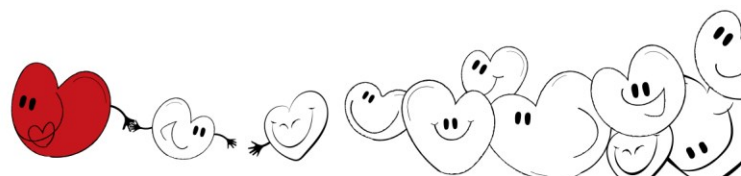
$$(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1) = x+1$$

$$(2a-b)^3(4a^2+2ab+b^2) = 8a^3-b^6$$

مثال ۴۳ حاصل $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^2+1)(x^{12}+x^6+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

مثال ۴۴ حاصل $\frac{(\sqrt{x}+2)(x+4)(x^2+16)(x^4+32)}{x+2\sqrt{x}+4}$ به ازای $x = \sqrt[3]{4}$ را به دست آورید.

مثال ۴۵ مساحت مستطیلی به طول $(x+y\sqrt{x}+y^2)$ و عرض $(\sqrt{x}-y)$ به ازای $x = \sqrt[3]{4}, y = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟



مثال ۴۶ اگر مساحت مثلثی با قاعده $2x + 3$ برابر $4x^3 + \frac{27}{4}$ باشد ارتفاع مثلث را به دست آورید.

تست ۴۷ اگر $0 < a < 1$ و $a^2 + \frac{4}{a^2} = 6$ باشد مقدار $a^3 - \frac{8}{a^3}$ کدام است؟

- ۱ $4\sqrt{2}$ ۲ $8\sqrt{2}$
۳ $-8\sqrt{2}$ ۴ $-4\sqrt{2}$

نکته نتایج اتحادهای فرعی

$$a^2 + b^2 =$$

$$a^6 + b^6 =$$

$$a^5 + b^5 =$$

مثال ۴۸ اگر $x + \frac{3}{x} = 5$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱ $x^4 + \frac{81}{x^4} =$

۲ $x^5 + \frac{243}{x^5} =$

