



دهمی

یازدهمی

با  بیایم تمام کنند

جزوه
دوره سالانه ۱۴۰۴

ریاضی

دهم

دکتر محمد سجاد نقیه

 naghiyeh

 Sajad.naghiyeh

توان‌های گویا و عبارتهای جبری

فصل توان‌های گویا و عبارتهای جبری از فصل‌های مهم کتاب ریاضی دهم است که بارم‌بندی آن در امتحانات نهایی به صورت زیر است:

← ۵ نمره : بارم در امتحانات نوبت اول (دی‌ماه)

← ۲ نمره : بارم در امتحانات نوبت دوم (خردادماه)

← ۲/۵ نمره : بارم در امتحانات شهریورماه

ریشه و توان

← **توان:** اگر عدد a ، n بار در خودش ضرب شود آن را a^n (به توان n) می‌گوییم:

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^n$$

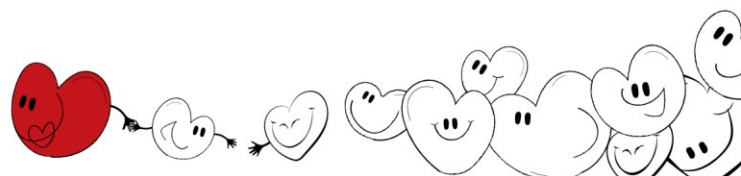
← **عکس توان، ریشه‌گیری است.** $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ (ریشه و توان رابطه دوسویه دارند)

← **ریشه:** اگر $a^n = b$ و n عدد طبیعی باشد، می‌گوییم a ریشه n ام عدد b است.

← **ریشه دوم:** به‌عنوان مثال اگر $a^2 = b$ و $b > 0$ باشد آنگاه a را ریشه دوم عدد b می‌گویند و آن را با $\pm\sqrt{b}$ نمایش می‌دهند.

ریشه‌های دوم عدد ۲۵، اعداد ± 5 می‌باشند $\longrightarrow (\pm 5)^2 = 25$

← هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه دوم می‌باشد و اعداد منفی ریشه دوم ندارند.



ادامه ریشه و توان

♦ **ریشه سوم:** اگر $a^3 = b$ باشد (a و b اعداد حقیقی)، a را ریشه سوم عدد b می‌گویند و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهند. هر عدد حقیقی فقط **یک** ریشه سوم دارد که هم‌علامت با خود عدد است.

ریشه سوم عدد -۶۴ است. $\rightarrow -۴ = \sqrt[3]{-۶۴} \Leftrightarrow (-۴)^3 = -۶۴$

♦ و به همین ترتیب می‌توان ریشه‌های چهارم، پنجم و... را تعریف کرد.

$$\pm 8 = \text{ریشه دوم } 64$$

$$3 = \text{ریشه دوم } 27$$

$$\pm 2 = \text{ریشه چهارم } 16$$

$$-1 = \text{ریشه پنجم } -1$$

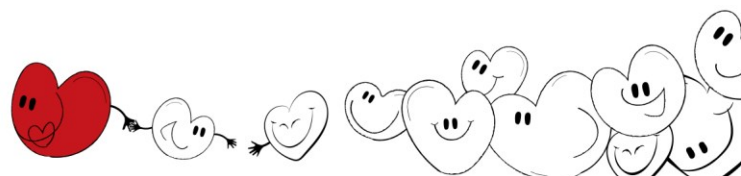
نکته

♦ اعداد مثبت یا منفی فقط یک ریشه n ام (n فرد باشد) دارند که هم‌علامت با خود عدد است.

♦ اعداد مثبت دو ریشه n ام (n زوج باشد) دارند که این دو ریشه قرینه یکدیگر می‌باشند.

♦ اعداد منفی ریشه n ام (n زوج باشد) ندارند.

♦ ریشه n ام عدد صفر (n عدد طبیعی باشد) برابر صفر است.



قواعد ریشه‌ها و رادیکال‌ها

$$\sqrt[n]{a^n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{n زوج باشد}} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{n فرد باشد}} = a \end{cases}$$

۱ ←

۲ ← **جمع و تفریق رادیکال‌ها:** در صورتی می‌توان رادیکال‌ها را جمع و تفریق کرد که دقیقاً شبیه هم باشند یعنی باید فرجه‌هایشان و عبارات زیر رادیکال‌ها برابر باشند:

مثال: $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

۳ ← **ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:** رادیکال‌ها با فرجه یکسان را می‌توان در هم ضرب یا برهم تقسیم کرد.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

مثال: $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{18}$, $\frac{3\sqrt[3]{6}}{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2}} = \sqrt[3]{3}$

۴ ← **ضرب فرجه‌ها:**

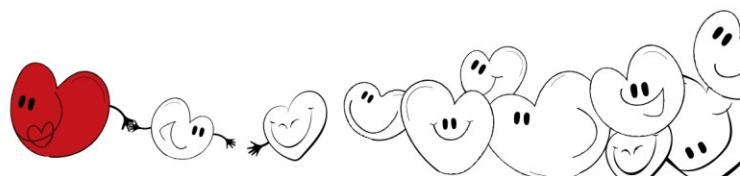
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2 \times 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

۵ ← **انتقال عدد یا عبارت به درون رادیکال:**

$$a^n \sqrt{b} = \sqrt{a^{2n} b}$$

مثال: $2^4 \sqrt{6} = \sqrt{2^8 \times 6} = \sqrt{16 \times 6} = \sqrt{96}$



قواعد ریشه‌ها و رادیکال‌ها

۶ ← به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ اگر $a \geq 0$ باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

اگر $a < 0$ و n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

۷ ←

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}} ; (a > 0)$$

مقایسه ریشه‌های مختلف يك عدد ($\sqrt[n]{a}$)

← اگر $a > 1$ باشد با افزایش فرجه حاصل کوچک‌تر می‌شود.

مثال:

$$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$$

$$64 > \sqrt{64} > \sqrt[3]{64} > \sqrt[4]{64} > \dots$$

۴

← اگر $0 < a < 1$ با افزایش فرجه حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

مثال:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$$

$$\frac{1}{64} < \sqrt{\frac{1}{64}} < \sqrt[3]{\frac{1}{64}} < \sqrt[4]{\frac{1}{64}} < \dots$$

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

← اگر $a < -1$ باشد (فرجه فرد) با افزایش فرجه حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

مثال:

$$a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$$

$$-8 < \sqrt[3]{-8} < \sqrt[5]{-8}$$

-۲

← اگر $-1 < a < 0$ (فرجه فرد) با افزایش فرجه حاصل کوچک‌تر می‌شود.

$$a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$$

مثال:

$$-\frac{1}{8} > \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} > \sqrt[5]{-\frac{1}{8}}$$

-۲



◆ مقدار تقریبی ریشه‌ها

◆ اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a}$ را به دست آوریم باید مشخص کرد که a بین توان n ام کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و بعد از طرفین نامساوی ریشه n ام بگیریم.

◆ به عنوان مثال اگر بخواهیم بدانیم $\sqrt[3]{15}$ در چه محدوده‌ای قرار دارد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$2^3 < 15 < 3^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{15} < \sqrt[3]{3^3} \rightarrow 2 < \sqrt[3]{15} < 3$$

◆ بنابراین $\sqrt[3]{15}$ بین اعداد ۲ و ۳ قرار دارد.

پرسش ۱ جاهای خالی را پر کنید.

الف هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یکدیگرند. عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

(متن کتاب درسی)

ب هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی

(متن کتاب درسی)

باشد ریشه پنجم آن است.

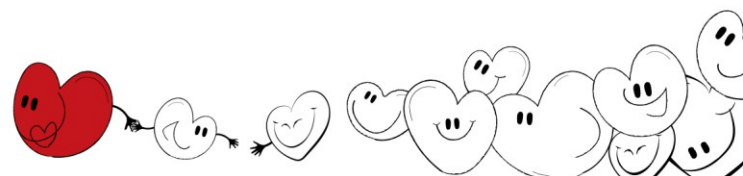
(تمرین کتاب درسی)

پ اعداد ۳ و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

(امتحان نهایی فراداد ۱۴۰۳)

ت عبارت $\sqrt{\sqrt{81}}$ برابر با عدد صحیح است.

ث اگر n یک عدد طبیعی زوج و a یک حقیقی منفی باشد حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر است.



پرسش ۲ کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف ریشه دوم عدد ۶۴ - برابر ۸ است.

ب جذر عدد ۶۴ می‌شود ۸.

پ اگر $0 < a < 1$ آن‌گاه $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$

ت $\sqrt[3]{27}$ برابر ۳ - است.

ث $\sqrt[3]{6} > \sqrt[4]{6}$

ج $a - \sqrt{a} - \sqrt[5]{a}$ ($0 < a < 1$)

چ $\sqrt{-7^2} = |-7| = 7$

ح $\sqrt[6]{(-3)^6} = 3$

پرسش ۳ یکی از علامتهای $>$ یا $<$ یا $=$ را در قرار دهید.

(تمرین کتاب درسی)

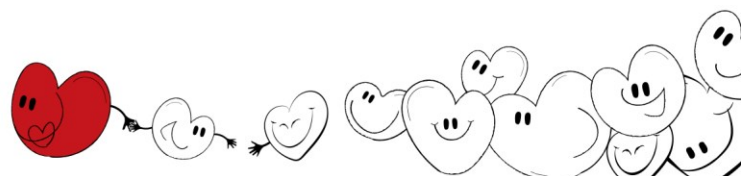
الف $\sqrt{0.5} \square \sqrt[3]{0.5}$

(تمرین کتاب درسی)

ب $\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$

پ $\sqrt[5]{-0.5} \square \sqrt[4]{-0.5}$

ت $\sqrt[3]{-4} \square \sqrt[5]{-4}$



پرسش ۴ یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ یا $=$ را در \square قرار دهید.

الف فرض کنید $a > 1$ است.

(تمرین کتاب درسی)

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[4]{a}$$

$$a^5 \square a^7$$

ب فرض کنید $0 < a < 1$.

(تمرین کتاب درسی)

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^6 \square a^5$$

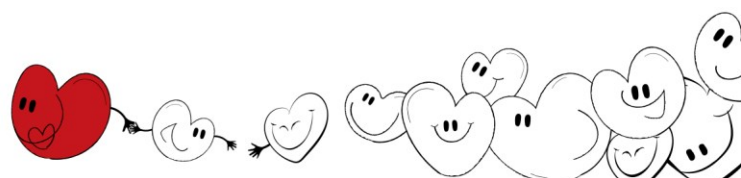
پرسش ۵ حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف $\sqrt{54} \times \sqrt{12} =$

ب $\sqrt[3]{93} \times \sqrt[3]{90} \times \sqrt[3]{200} =$

پ $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{64} =$

ت $\sqrt[5]{-48} \times \sqrt[5]{-27} =$



توان‌های گویا

♦ برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

مثال: $4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$, $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

نکته

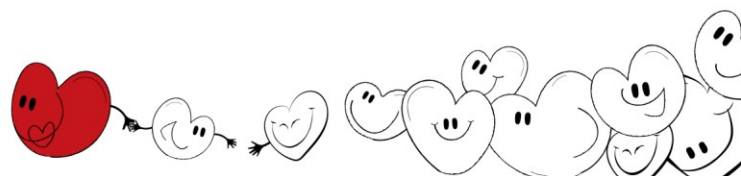
♦ اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود. به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{2}{4}}$ تعریف نمی‌شوند.

♦ هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m, n و $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

♦ هم‌چنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$



پرسش ۶ اعداد توان دار زیر ریشه به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان آنها را به دست آورید.

(فعالیت کتاب درسی)

الف $55^{\frac{2}{5}} =$

ب $37^{\frac{2}{3}} =$

پ $16^{-\frac{1}{4}} =$

ت $81^{\frac{3}{4}} =$

قواعد توان

اگر r و s دو عدد گویا باشند و a و b اعدادی مثبت باشند قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار است.

۱ $a^0 = 1$

۲ $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۳ $a^r \times b^r = (ab)^r$

۴ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

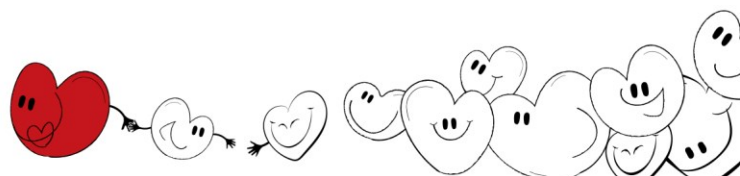
۵ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

۶ $(a^r)^s = a^{rs}$

۷ $1^r = 1$

۸ $a^{-r} = a^{-(r^s)}$

۹ $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$



پرسش ۷ توان‌های کسری را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آن‌ها را به دست آورید.

الف $47^{\frac{2}{3}}$ =

(تمرین کتاب درسی)

ب $33^{\frac{1}{3}} \times 33^{\frac{2}{3}}$ =

(تمرین کتاب درسی)

پ $(42^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}}$ =

(تمرین کتاب درسی)

ت $125^{-\frac{2}{3}}$ =

(تمرین کتاب درسی)

ث $5^{-0.8}$ =

پرسش ۸ عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

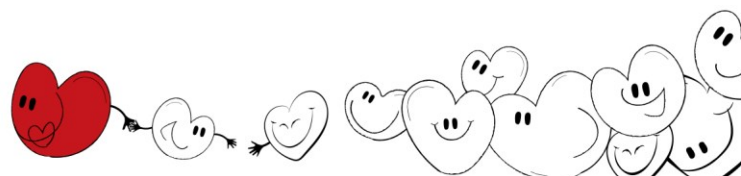
الف $(4^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$ =

ب $\frac{3^{-4}}{\sqrt{243}}$ =

پ 25×35 =

ت $\sqrt[6]{98} \times 2^3$ =

ث $8^{\frac{1}{5}} \div 8^{\frac{1}{4}}$ =



پرسش ۹ رادیکال‌های زیر را به شکل توان کسری بنویسید.

الف $\sqrt[3]{243} =$

ب $\sqrt[5]{\frac{1}{128}} =$

پ $(\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{4}} =$

ت $\sqrt{3\sqrt{5}} =$

تست ۱۰ اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$ باشد. حاصل عبارت $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ کدام است؟ (فارج از کشور ۹۸)

۱ ۳

۲ ۴

۳ ۵

۴ ۶

تست ۱۱ اگر $A = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - 3\sqrt{8}$ باشد A^2 برابر کدام است؟ (فارج از کشور ۹۵)

۱ ۲۴

۲ ۳۰

۳ ۳۲

۴ ۳۶

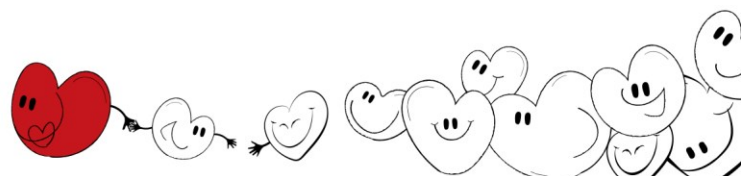
تست ۱۲ اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}(\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}}$ باشد حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱ ۰/۲۵

۲ ۰/۵

۳ ۰/۷۵

۴ ۱



(انسانی فارغ ۹۸)

 تست ۱۳ حاصل $2^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{16})\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$ کدام است؟

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

 تست ۱۴ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{2} \times 16^{-\frac{3}{4}}}$ کدام است؟

۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴

