



با ❤ بیا تام لند

دوره سالانه ۱۴۰۴

ریاضی یازدهم

دکتر محمد سجاد نقیه





معادله درجه ۲

مرور سریع دهم:

به هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد معادله درجه دوم می گویند مانند:

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ که مهم ترین روش های حل معادله درجه ۲ عبارتند از:}$$

۱ روش تجزیه

۲ روش ضرایب

۳ روش مربع کامل



معادله درجه ۲

مرور سریع دهم:

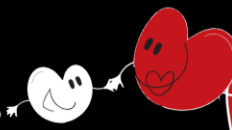
به هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد معادله درجه دوم می گویند مانند:

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \text{ که مهم ترین روش های حل معادله درجه ۲ عبارتند از:}$$

۴ روش ریشه گیری

۵ روش دلتا

که در ادامه هر کدام از روش ها را توضیح خواهیم داد.



۱ روش تجزیه

♦ برای استفاده از این روش نیاز به دانستن مباحث مربوط به فاکتورگیری و اتحادهای مهم مثل اتحاد جمله مشترک و اتحاد مزدوج از سال دهم کتاب ریاضی: فصل سوم داریم که آن‌ها را در ادامه مرور می‌کنیم:

ضرب

اتحاد جمله مشترک $\longrightarrow (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

مثال: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$

$ab = -6$
 $a + b = -1$

جمع
منها



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow b = 0$$

۱ روش تجزیه

$$\text{اتحاد مزدوج} \rightarrow x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$\text{مثال: } x^2 - \overset{a^2=25}{25} = (x - 5)(x + 5) \rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$ax^2 + bx = x(ax + b) \rightarrow \text{فاکتورگیری}$$

مثال: $3x^2 - 17x = x(3x - 17) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{17}{3} \end{cases}$ (تک تک)

~~$x^2 - 5x = -4$ روش اشتباه: $x(x - 5) = -4 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x - 5 = -4 \rightarrow x = -1 \end{cases}$~~

$\underbrace{x^2 - 5x + 4}_{a+b \quad a \cdot b} = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$



نکته

همچنین در فصل ۴ کتاب ریاضی ۱ این نکته را متوجه شدیم که:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

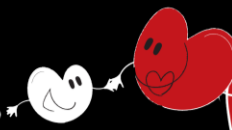
$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

حال با دانستن اتحادهای مهم و نکته ذکر شده می توان معادله درجه دوم را حل کرد.





دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

$$x^2 - 9x + 18 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-6)(x-3) = 0$$

$$\text{یا} \begin{cases} x-6=0 \rightarrow x_1=6 \\ x-3=0 \rightarrow x_2=3 \end{cases}$$

$$5x^2 - 30x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(5x-30) = 0$$

$$\text{یا} \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x-30=0 \rightarrow 5x=30 \rightarrow x_2=6 \end{cases}$$

$$x^2 - 144 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (x-12)(x+12) = 0$$

$$\text{یا} \begin{cases} x_1 = -12 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$



۲

روش ضرایب: در یک معادله درجه ۲ به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) دو حالت مهم ممکن است برای ضرایب

پیش بیاید که عبارتند از:

اگر $a + b + c = 0$ باشد (جمع ضرایب صفر باشد): آن گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشه دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

مثال: در معادله $x^2 - 5x + 4 = 0$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{array} \right\} \rightarrow a + b + c = 1 + (-5) + 4 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{array} \right.$$



دهم

یازدهم

دوره سالانه ۱۴۰۴

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \quad a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$a + c = b \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases} \quad \text{روش ضرایب:}$$

اگر $a + c = b$ باشد: آن گاه یکی از ریشه‌ها ۱- و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

مثال: در معادله $3x^2 + 8x + 5 = 0$ داریم:

$$\left. \begin{matrix} a = 3 \\ b = 8 \\ c = 5 \end{matrix} \right\} \rightarrow a + c = b = 8 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

تجزیه $\rightarrow 3(x+1)\left(x+\frac{5}{3}\right)$



۳ روش مربع کامل

برای درک بهتر این روش هر مرحله از توضیحات را برای حل معادله $2x^2 + 20x + 18 = 0$ به کار می‌بریم.

۱ ابتدا اگر ضریب x^2 غیر از یک بود معادله درجه ۲ را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + 10x + 9 = 0$$

۲ عدد ثابت را به طرف راست تساوی منتقل می‌کنیم.

$$x^2 + 10x = -9$$



۳ روش مربع کامل

برای درک بهتر این روش هر مرحله از توضیحات را برای حل معادله $2x^2 + 20x + 18 = 0$ به کار می‌بریم.

۳ ضرب x را نصف می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم و عدد حاصل را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

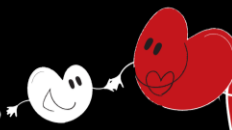
$$+\left(\frac{10}{2}\right)^2 = +25 \rightarrow x^2 + 10x + 25 = -9 + 25 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 16$$

۴ سمت چپ تساوی را به شکل مربع کامل می‌نویسیم.

$$x^2 + bx + 25 = (x+5)^2 \Rightarrow (x+5)^2 = 16$$



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

۳ روش مربع کامل

برای درک بهتر این روش هر مرحله از توضیحات را برای حل معادله $2x^2 + 20x + 18 = 0$ به کار می‌گیریم.

از طرفین جذر می‌گیریم تا معادله حل شود. ۵

$$(x+5)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x+5=4 \rightarrow x=-1 \\ x+5=-4 \rightarrow x=-9 \end{cases}$$



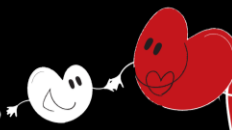
naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

۴ روش ریشه‌گیری: اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله درجه دوم

$$x = -\sqrt{a} \quad , \quad x = \sqrt{a}$$

$$x^2 = a$$
 عبارت‌اند از:



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



۱۴۰۴

دوره سالانه



یازدهم

دهم

مثال ۱ معادله $x^2 - 4 = 12$ را به روش ریشه گیری حل کنید.

$$x^2 - 4 = 12 \rightarrow x^2 = 16 \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{16} = 4 \\ x_2 = -\sqrt{16} = -4 \end{cases}$$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



۱۴۰۴

دوره سالانه



یازدهم

دهم

۵ روش دلتا: برای حل یک معادله درجه ۲ به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a \neq 0$ به روش Δ به صورت زیر عمل

می کنیم:

ابتدا Δ که برابر با $\Delta = b^2 - 4ac$ می باشد را محاسبه می کنیم که بر حسب علامت Δ حالت های

زیر به وجود می آید:

۱

$$\Delta > 0$$

معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



۱۴۰۴

دوره سالانه



یازدهم

دهم

۵ روش دلتا: برای حل یک معادله درجه ۲ به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a \neq 0$ به روش Δ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۲ $\Delta = 0 \longrightarrow$ معادله یک ریشه مضاعف دارد. $\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$

۳ $\Delta < 0 \longrightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد.



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

مثال ۲

معادله زیر را به روش دلتا حل کنید.

$$3x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(3)(-5) \Rightarrow 64 + 60 = 124$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{124}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{124}}{6}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

پرسش ۳ هر کدام از معادلات زیر را به روش ذکر شده و روبه روی آن حل کنید.

الف $x^2 - x - 6 = 0$

(روش تجزیه)



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

پرسش ۳ هر کدام از معادلات زیر را به روش ذکر شده و روبه روی آن حل کنید.

ب $3x^2 + 18x - 30 = 0$

(روش مربع کامل)



دوره سالانه ۱۴۰۴



دهم
یازدهم

پرسش ۳ هر کدام از معادلات زیر را به روش ذکر شده و روبه روی آن حل کنید.

پ $(x + \frac{7}{6})^2 = \frac{81}{36}$

(روش ریشه گیری)



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

پرسش ۳ هر کدام از معادلات زیر را به روش ذکر شده و روبه روی آن حل کنید.

ت $3x^2 + 7x + 4 = 0$

(روش دلتا)



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

پرسش ۳ هر کدام از معادلات زیر را به روش ذکر شده و روبه روی آن حل کنید.

ث $4x^2 - 11x + 7 = 0$

(روش ضرایب)



دوره سالانه ۱۴۰۴



دهم
یازدهم

تست ۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی

(کنکور سراسری)

متمايز است؟

۱ $(-2, 2/5) - \{0\}$ ۲ $(-2, 3/5) - \{1/2\}$

۳ $(-1, 3/5) - \{1/2\}$ ۴ $(-1, 2/5) - \{1/2\}$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



دهم
یازدهم

تست ۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی

(کنکور سراسری)

است؟ (بزرگ ترین بازه ممکن را در نظر بگیرید.)

۲ $-3 < m < 4$

۱ $-3 < m < 5$

۴ $-1 < m < 5$

۳ $-2 < m < 4$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

تست ۶

معادله $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌های

غیر مشترک کدام است؟

(سراسری دی ۱۴۰۲)

۳ ۲

۲ ۱

۷ ۴

۴ ۳



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

تست ۷ اگر دو برابر مجموع سن دو برادر ۱۰۰ سال باشد و حاصل ضرب سن آنها ۵۷۶ باشد. چند سال بعد سن برادر بزرگ تر $\frac{1}{5}$ برابر سن برادر کوچک تر می شود؟

۱۲ **۲**

۱۰ **۱**

۱۴ **۴**

۲۰ **۳**



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

♦ روش‌های حل معادلات با ظاهر ترسناک ولی باطن درجه ۲

← ♦ برای حل این گونه معادلات تغییر متغیر خوراکیه! قسمتی از معادله را برابر متغیر جدیدی مانند t قرار می‌دهیم بعد از این کار عموماً با یک معادله درجه ۲ سروکار خواهیم داشت که حل معادله درجه ۲ در بحث‌های پیشین مورد بررسی قرار گرفت.



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



(متن کتاب درسی)

مثال ۸ معادله $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ را حل کنید.

برای تبدیل شدن این معادله، به یک معادله درجه ۲ می‌توان x^2 را برابر t در نظر گرفت و بعد معادله درجه ۲ به دست آمده را حل کنیم.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = t \rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \xrightarrow{\text{روش تجزیه}} (t-1)(t-9) = 0 \quad \begin{cases} t=1 \\ t=9 \end{cases}$$

$$t = x^2 \quad \begin{cases} 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ 9 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases} \quad \text{و این یعنی}$$





دوره سالانه ۱۴۰۴



یازدهم

دهم

پرسش ۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف $(x^2 + x + 2)^2 + 3(x^2 + x + 2) - 10 = 0$



۱۴۰۴

دوره سالانه



یازدهم

دهم

پرسش ۹ معادلات زیر را حل کنید.

ب $x^4 - 3x^2 - 36 = 0$



naghiyeh



Sajad.naghiyeh



۱۴۰۴

دوره سالانه



یازدهم

دهم

پرسش ۹ معادلات زیر را حل کنید.

پ $x^6 - 5x^3 - 36 = 0$

مدرسه‌ای برای همه

تام‌لند

