

**RESTART** 

دوره جدید تاملند  
شروع از صفر

کنکور ۱۴۰۴

# ریاضی تجربی

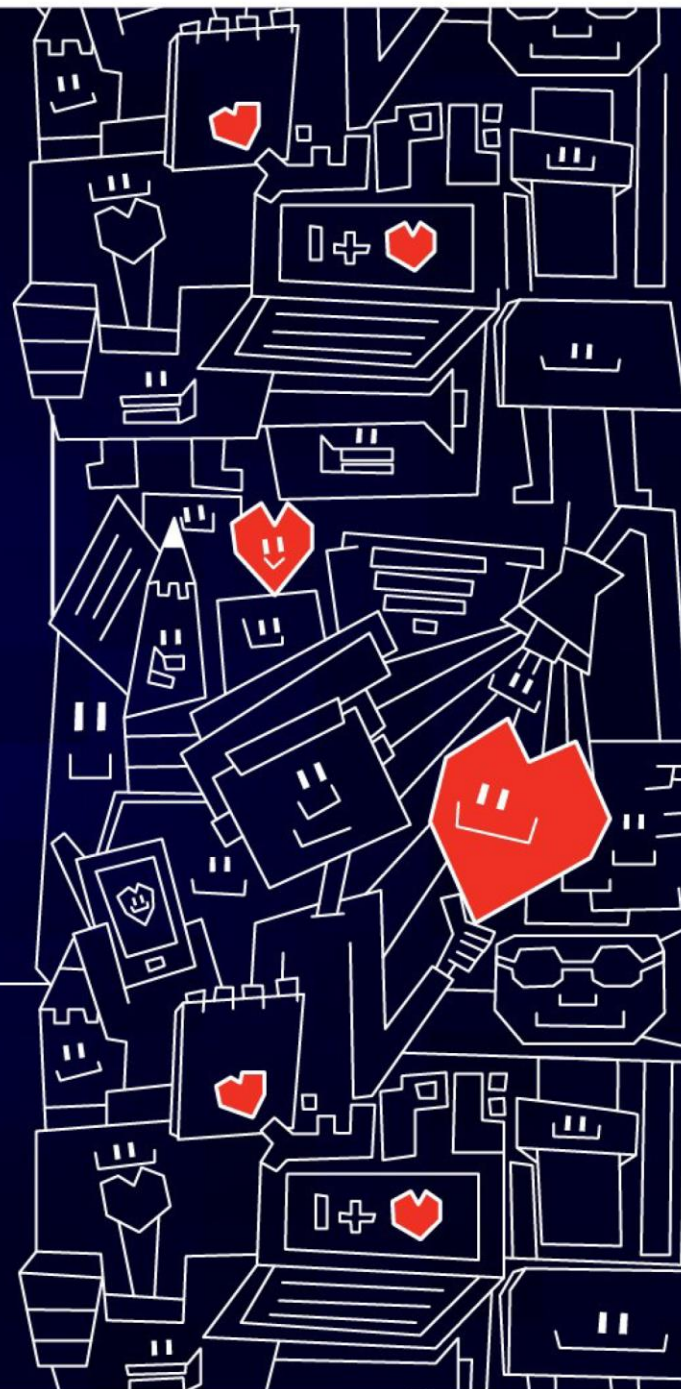
استاد افشین ملاکپور

 [Afshin\\_mallakpour](https://t.me/Afshin_mallakpour)

 [afshinmallakpour](https://www.instagram.com/afshinmallakpour)

جزوه ۱

معادلات و نامعادلات



# معادلات و نامعادلات



۱ حل معادله درجه دوم و بحث بر روی تعداد ریشه‌ها

۲ روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه دوم

۳ بررسی علامت ریشه‌ها در معادله درجه دوم

۴ تشکیل معادله درجه دوم جدید با استفاده از معادله مفروض

۹ معادلات گویا و رادیکالی

۵ حل معادله دوجذوری و معادلاتی که قابل تبدیل به درجه ۲ هستند ۱۰ تعیین علامت و روش حل نامعادلات

۶ حل معادله درجه سوم

۷ تابع درجه دوم (سه‌می) و نکات مربوط به آن

۸ بررسی وضعیت دو منحنی نسبت به یکدیگر

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (سه‌می)

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

تعیین علامت و حل نامعادلات

ریاضی ۱ و ۲

ریاضی ۲

ریاضی ۱ و ۲

## معادله‌ی درجه دوم

فرم کلی یک معادله‌ی درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  می باشد که در آن  $a \neq 0$  است. ولی  $b$  یا  $c$  یا هر دو می توانند صفر باشند که در این صورت معادله‌ی درجه دوم را **ناقص** می نامیم. روش حل معادله‌ی درجه دوم در حالت‌های ناقص را با ذکر مثال نشان می دهیم.

$$\boxed{1} \quad 3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x - 7) = 0 \rightarrow x' = 0 \quad \text{یا} \quad 3x - 7 = 0 \rightarrow x'' = \frac{7}{3}$$

پس در حالتی که  $c = 0$  باشد یکی از ریشه‌های معادله صفر خواهد بود.



$$\boxed{2} \quad 4x^2 - 5 = 0 \rightarrow 4x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.  $3x^2 + 4 = 0 \rightarrow 3x^2 = -4 \rightarrow x^2 = -\frac{4}{3}$

پس در حالتی که  $b = 0$  باشد، اگر  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت باشند معادله دو ریشه‌ی قرینه‌ی حقیقی دارد و اگر  $a$  و  $c$  هم‌علامت باشند معادله ریشه‌ی حقیقی نخواهد داشت.

$$\boxed{3} \quad 2x^2 = 0 \rightarrow \underbrace{(x^2)}_{\times \times} = 0 \rightarrow x' = x'' = 0$$

پس در حالتی که  $b, c = 0$  باشد معادله ریشه مضاعف صفر خواهد داشت.



تست ۱ به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله درجه دوم  $(m+1)x^2 - (m^2-4)x + 2m^2 + m - 10 = 0$  دو ریشه قرینه

حقیقی دارد؟

- ۱  $\pm 2$      
  ۲ فقط ۲     
  ۳ فقط -۲     
   $\emptyset$

$$b=0, \text{ ممکن است } a, c \rightarrow m^2 - c = 0 \rightarrow m^2 = c \rightarrow m = \pm 2$$

$m=2 \rightarrow 3x^2 = 0$  ریشه مضاعف منفرجه دارد.       $m=2$  غنای ۲

$m=-2 \rightarrow -x^2 - c = 0 \rightarrow x^2 = -c$  ریشه ندارد.       $m=-2$  غنای -۲



$$ax^2 + bx + c = 0$$

## حالت‌های خاص در حل معادله‌ی درجه دوم

اثبات:

جمع ضرایب صواب

۱ اگر  $a + b + c = 0 \rightarrow x' = 1, x'' = \frac{c}{a}$

$$2x^2 + 7x - 9 = 0 \rightarrow x' = 1, x'' = -\frac{9}{2}$$

جمع اعداد را آخری = اولی

۲ اگر  $a + c = b \rightarrow x' = -1, x'' = -\frac{c}{a}$

$$3x^2 - 7x - 10 = 0 \rightarrow x' = -1, x'' = \frac{10}{3}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow x' = 1$$

$$\text{در این صورت: } \frac{ax^2}{1} = \frac{c}{a} \rightarrow x'' = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a + c = b \rightarrow x' = -1$$

$$\frac{ax^2}{-1} = \frac{c}{a} \rightarrow x'' = -\frac{c}{a}$$



ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید. **مثال ۲**

**الف**  $b = 2 - \sqrt{5}$   
 $2x^2 - (\sqrt{5} - 2)x - \sqrt{5} = 0$   $\xrightarrow{a+c=b}$   $x' = -1, x'' = -\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

**ب**  $(\sqrt{3} - 1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3} + 1) = 0$   $\xrightarrow{a+b+c=0}$   $x' = 1, x'' = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

گراییدن غرض کسرها  $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = 2 + \sqrt{3}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  |  $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$



مثال ۲ ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\textcircled{ج} \quad ax^2 - 2x - (a+2) = 0 \xrightarrow{a+c=b} x' = -1, \quad x'' = \frac{a+2}{a} = \frac{a}{a} + \frac{2}{a} = 1 + \frac{2}{a}$$

تفکیک کردن:

$$\frac{a \pm b + \dots \pm m}{K} = \frac{a}{K} \pm \frac{b}{K} \pm \dots \pm \frac{m}{K}$$

که یک یک جدا

~~$$\frac{2x}{2x+c} = \frac{2x}{2x} + \frac{2x}{c}$$~~

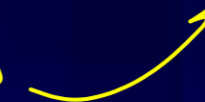




## روش تجزیه در حل معادله درجه دوم

اگر ضریب  $x^2$ ، ۱ باشد گاهی اوقات می توان معادله را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه نمود و آن را حل کرد.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$x^2 + \underline{bx} + \underline{ax} + ab$$




مثال ۳ ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

الف  $x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \rightarrow x' = 3, x'' = 7$

ب  $x^2 - 4x - 12 = 0 \rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \rightarrow x' = 6, x'' = -2$



$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$



ج  $2x^2 - 5x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$$x' = \frac{1}{2} = 2 \quad x'' = -\frac{3}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

روش  $a, c$  برای حل معادله درجه دوم:

- ① ابتدا  $a$  را جردانسته و در  $c$  ضرب می‌کنیم
- ② معادله حاصله را تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم
- ③ ریشه‌های بدست آمده را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم

د  $3x^2 + 7x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 7x + 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x' = -\frac{1}{3} \quad x'' = -\frac{7}{3} = -2$

حل:  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 \rightarrow (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3}) = 0$   
 $x' = \sqrt{2}, x'' = \sqrt{3}$

$$ax \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$x^2 + \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}\right)x + \frac{1}{a^2} = 0 \rightarrow (x+a)\left(x + \frac{1}{a^2}\right) = 0 \rightarrow x' = -a, x'' = -\frac{1}{a^2}$

توجه:  $a + \frac{1}{a^2}$



## حل معادله‌ی درجه دوم در حالت کلی و بحث بر روی تعداد ریشه‌ها

$$x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

اگر  $b$  را بتوان بر ۲ تقسیم نمود نصف آن را  $b'$  می‌نامیم ( $b' = \frac{b}{2}$ ) و ریشه‌ها را از رابطه زیر به دست می‌آوریم.

$$x', x'' = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

مثال:  $3x^2 - 24x + 13 = 0 \rightarrow x', x'' = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 12(13)}}{3}$

$\Delta' = 144 - 156 = -12$   
 $b' = -12$   
 $x', x'' = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 156}}{3}$



۱  $\Delta$  یا  $\Delta' > 0$   $\longrightarrow$  معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

۲  $\Delta$  یا  $\Delta' = 0$   $\Longrightarrow$  معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی (یک ریشه مضاعف) دارد.

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

۳  $\Delta$  یا  $\Delta' < 0$   $\longrightarrow$  معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.



تست ۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  معادله درجه دوم  $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$  دارای دو ریشه

حقیقی متمایز است؟  $(m \neq \frac{1}{2})$  دست نود اگر  $m = \frac{1}{2}$  باشد معادله دیگر درجه دوم نیست و نمی تواند هر ریشه داشته باشد.  $b' = 3$  (سراسری ریاضی ۹۸)

- ۱  $-2 < m < 2/5$     ۲  $-2 < m < 3/5$     ۳  $-1 < m < 3/5$     ۴  $-1 < m < 2/5$

$$\Delta > 0 \rightarrow b'^2 - ac > 0 \rightarrow 9 - (2m-1)(m-2) > 0$$

$$9 - (2m^2 - 5m + 2) > 0 \rightarrow -2m^2 + 5m + 7 > 0$$

روش حل با معادله درجه دوم:  $-2m^2 + 5m + 7 = 0 \rightarrow m = -1, m = \frac{7}{2}$



$$\boxed{-1 < m < \frac{7}{2}}$$

$-2m^2 + 5m + 7 > 0 \rightarrow m = -1, m = \frac{7}{2}$   
 حالت  $a = -2 < 0$  با علامت  $>$  نامساوی است  
 $-1 < m < \frac{7}{2}$



قسط ۵ ریشه مضاعف معادله  $ax^2 + 2(a-4)x + 2 = 0$  کدام می تواند باشد؟

$$b = a - 4$$

$$\frac{1}{2} \text{ (4)}$$

$$2 \text{ (3)}$$

$$-\frac{1}{2} \text{ (crossed out)}$$

$$-1 \text{ (1)}$$

ابتدا باید ببینیم برای چه مقدار  $a$  معادله ریشه مضاعف دارد پس آن ریشه مضاعف را بنویسیم

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (a-4)^2 - 2a = 0 \rightarrow a^2 - 10a + 17 - 2a = 0 \rightarrow$$

$$a^2 - 10a + 17 = 0 \rightarrow (a-1)(a-9) = 0 \rightarrow a=1, a=9$$

$$1x^2 + 1x + 2 = 0$$

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{17} = -\frac{1}{17}$$

$$2x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ (1)}$$



تست ۶ اگر  $x = -3$  ریشه مضاعف معادله  $2x^2 + (a-1)x - 3b = 0$  باشد،  $a-b$  کدام است؟

روش اول:

$$\Delta = 0 \rightarrow (a-1)^2 + 24b = 0 \rightarrow 144 + 24b = 0 \rightarrow 24b = -144 \rightarrow b = -7$$

$$\frac{b}{2a} = -3 \rightarrow \frac{a-1}{2} = 3 \rightarrow a-1 = 6 \rightarrow a = 7$$

$$a-b = 7 - (-7) = 14$$

روش دوم:  $x' = x'' = -3 \rightarrow (x+3)(x+3) = 0 \rightarrow (x+3)^2 = 0$  مربع کامل

(به ترتیب بهتر است)

حل: اگر  $x' = 2, x'' = -7$  ریشه های معادله  $2x^2 - (m+n)x + 3n - 5m + 1 = 0$  باشند

$2(x-2)(x+7) = 0 \rightarrow 2x^2 + 10x - 28 = 0$   $m, n$  کدام است؟

$$\begin{cases} m+n = -10 \\ -5m+3n+1 = -28 \end{cases}$$

$$x^2 + 7x + 9 = 0 \xrightarrow{x^2} 2x^2 + 14x + 18 = 0$$

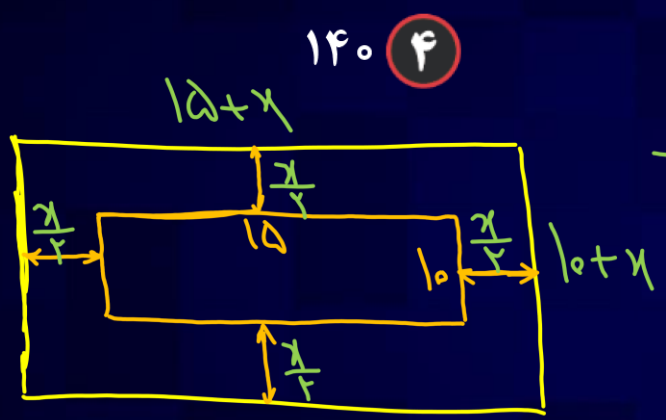
$$\begin{cases} a-1 = 14 \rightarrow a = 15 \\ -3b = 18 \rightarrow b = -6 \end{cases}$$





قست ۷ یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع

قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط قاب عکس چند سانتی متر است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱۴۰ ۴

۱۲۰ ۳

۷۰ ~~۲~~

۳۵ ۱

$$S = (15+x)(10+x) = 300 \rightarrow x^2 + 25x + 150 = 300$$

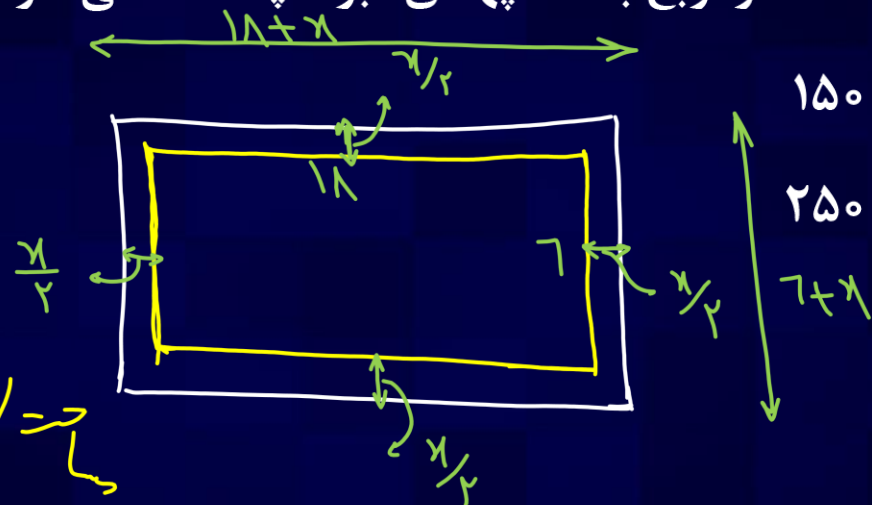
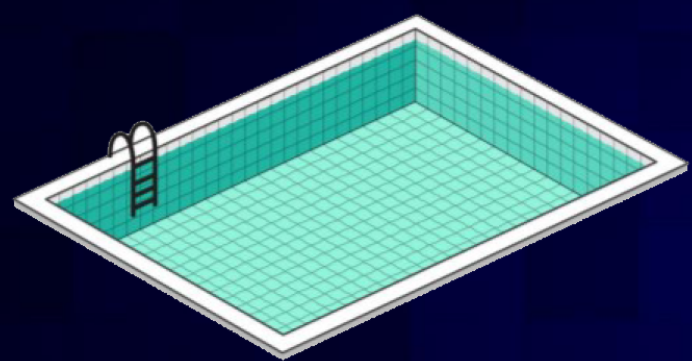
$$x^2 + 25x - 150 = 0 \rightarrow (x+30)(x-5) = 0 \rightarrow x = -30 \text{ یا } x = 5$$

$$x = 5 \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{طول قاب} &= 15+x = 20 \\ \text{عرض قاب} &= 10+x = 15 \\ P &= 2(20+15) = 70 \end{aligned}$$

**تست ۸** استخری مستطیل شکل به ابعاد ۶ و ۱۸ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش می باشد. اگر این آبراه

دارای پهنا ی یکسان و مساحت ۸۱ مترمربع باشد، پهنا ی آبراه چند سانتی متر است؟



- ۱۵۰
- ۲۵۰
- ۱۰۰
- ۲۰۰

مساحت آبراه + مساحت آبراه = مساحت کل

$$7 \times 18 + 81 = (18+x)(7+x) \rightarrow x^2 + 25x - 81 = 0 \rightarrow (x+27)(x-3) = 0 \rightarrow x = -27 \text{ یا } x = 3$$

پهنا ی آبراه =  $\frac{x}{2} = \frac{3}{2} \text{ m} \times 100 = 150 \text{ cm}$



زنی جوانی:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$$

$$5x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{5}$$

$$\text{روش جایگذاری: } x = 5 - 2y \rightarrow x = 5 - \frac{1}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\begin{aligned} 3(5 - 2y) - 5y &= 7 \\ -10y &= -1 \rightarrow y = \frac{1}{10} \end{aligned}$$



تست ۹

مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن گاه

حاصل ضرب پول های باقی مانده آن ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم

(سراسری تجربی ۱۴۰۰ - فارغ)

کدام است؟

$$\begin{aligned} x &= \text{پول اولیه اکرم} \\ y &= \text{پول اولیه علی} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = 100 \rightarrow y = 100 - x \\ (x + 10)(y - 10) = 475 \end{cases}$$

$$(x + 10)(90 - x) = 475$$

از ضرب بینها استفاده میکنیم

$$\begin{aligned} x = 9 &\rightarrow 19 \times 81 \\ x = 10 &\rightarrow 20 \times 75 \\ x = 15 &\rightarrow 25 \times 75 \end{aligned}$$

۹

۱۵

۱

۲

۳

۴



تست ۱۰ دو سال پیش سن مریم ۷ برابر سن برادرش بوده است. اکنون سن مریم مربع سن برادرش است.

مجموع سن مریم و برادرش در حال حاضر کدام می تواند باشد؟

- ۳۰  ۴      ۱۶  ۳      ۱۸  ۲      ۲۰  ۱
- $x =$  سن مریم در حال حاضر       $y =$  سن برادرش در حال حاضر

$$\begin{cases} x - 7 = 7(y - 7) \\ x = y^2 \end{cases} \rightarrow y^2 - 7 = 7y - 49 \rightarrow y^2 - 7y + 42 = 0 \rightarrow (y - 14)(y - 3) = 0 \rightarrow$$

$$14 \xrightarrow{+} y = 14 \quad x = 196 \quad y = 3 \xrightarrow{+} 7 \quad x = 9$$



$$a, b, c \text{ ضرایب} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{matrix} \rightarrow x' \\ \leftarrow x'' \end{matrix}$$



رابطه‌ی بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

ابتن =

۱ مجموع ریشه‌ها  $x' + x'' = -\frac{b}{a} = S$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

۲ حاصل ضرب ریشه‌ها  $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = P$

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۳ قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها  $|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$  حما  $\Delta$

**تذکر** اگر در رابطه بین ریشه‌ها جای  $x'$  و  $x''$  را عوض کنیم و رابطه تغییر نکند به آن رابطه، متقارن گفته می‌شود. هر رابطه‌ای که برحسب  $x'$  و  $x''$  متقارن باشد را می‌توانیم با عملیات ریاضی مثل مخرج مشترک گرفتن، اتحادها و تجزیه، فاکتورگیری، به توان رساندن، برحسب ۳ رابطه فوق نوشت.



از بین روابط متقارن بر حسب ریشه‌ها حفظ بودن ۴ مورد زیر ضروری است:

۴ مجموع معکوسات ریشه‌ها:  $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x'' + x'}{x'x''} = \frac{S}{P}$

۵ مجموع مربعات ریشه‌ها:  $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P$   
مجدوراً  
 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$



از بین روابط متقارن بر حسب ریشه‌ها حفظ بودن ۴ مورد زیر ضروری است:

۶ مجموع مکعبات ریشه‌ها:  $x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^3 - 3PS$

$$(a+b)^3 = \underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{3ab(a+b)} \rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

۷ مجموع جذر ریشه‌ها:  $|\sqrt{x'} + \sqrt{x''}| = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

$$\sqrt{x'} + \sqrt{x''} = A \xrightarrow{\text{بمربعان}} x' + x'' + \underbrace{2\sqrt{x'} \cdot \sqrt{x''}}_{2\sqrt{x'x''}} = A^2 \rightarrow A^2 = S + 2\sqrt{P} \rightarrow A = \pm \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$A > 0$   $\text{نشان}$   $\text{نشان}$



$$\beta = -\frac{b}{a} = 2 \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$



مثال ۱۱ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند مطلوب است حاصل عبارات زیر:

$$\text{الف} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\text{ب} \quad \alpha^4\beta + \beta^4\alpha = \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) = P(S^3 - 3PS) = \frac{1}{2}(8 - 3 \cdot 2) = \frac{5}{2}$$





$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$S = 2 \quad P = \frac{1}{2}$$



مثال ۱۱ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند مطلوب است حاصل عبارات زیر:

$$\text{ج} \quad \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2}{2(\alpha\beta)^2} = \frac{(4-1)^2 - 2(\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{4})} = 9 - 0.5 = 8.5$$

$$\text{د} \quad |\alpha^2 - \beta^2| = |(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \times S \right| = \left| \frac{\sqrt{16-4}}{2} \times 2 \right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$S=2 \quad P=\frac{1}{4}$$



مثال ۱۱ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - 4x + 1 = 0$  باشند مطلوب است حاصل عبارات زیر:

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \frac{(\sqrt{\alpha})^2 (\sqrt{\beta})^2}{\sqrt{\alpha\beta}} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{P} \times \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{PS + 2P\sqrt{P}} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

رع:  $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = A \xrightarrow{\text{بمربع کردن}} \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \rightarrow PS + 2P\sqrt{P} = A^2$

$$A = \sqrt{PS + 2P\sqrt{P}}$$

اگر در معادله درجه دوم پارامتری، رابطه‌ای مقارن بین ریشه‌ها داده شده باشد، می‌توان آن رابطه را برحسب روابط  $S$  و  $P$  نوشت و از آن‌جا پارامتر را به دست آوریم.

$$\gamma x^2 - mx + \gamma m - 1 = 0$$

$$S = \frac{m}{\gamma} \quad P = \frac{\gamma m - 1}{\gamma}$$

$$\alpha^2 \beta + \beta^2 \alpha = 4 \quad m = ?$$

$$\alpha \beta (\alpha + \beta) = 4$$

$$P \cdot S = 4$$

$$\frac{\gamma m - 1}{\gamma} \times \frac{m}{\gamma} = 4$$



$$ax^2 + bx + C = 0$$



قسط ۱۲ به ازای کدام مقدار  $k$  مجموع معکوسات ریشه‌های معادله درجه دوم  $(2x-1)^2 = kx+3$  برابر  $\frac{3}{4}$  است؟

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{3}{4} \xrightarrow{-7} \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{4}$$

۳

۲

۱

$$6x^2 - 6x + 1 = kx + 3 \rightarrow 6x^2 - x(k+6) - 2 = 0$$

آدم

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{\frac{k+6}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{3}{4}$$

$$k+6 = -6 \rightarrow k = -12$$



سؤال ۱۳ به ازای کدام مقدار  $a$  یک ریشه معادله  $x^2 + 2ax + 1 - 3a = 0$  از ریشه دیگر آن  $6$  واحد بیشتر است؟

۴  $-5$  و  $-2$

۳  $5$  و  $-2$

~~۲ و  $-5$~~

۱  $5$  و  $2$

$$\alpha = \beta + 6 \rightarrow |\alpha - \beta| = 6 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 6 \rightarrow \sqrt{4a^2 - 4(1 - 3a)} = 6$$

$$4a^2 - 4 + 12a = 36 \rightarrow 4a^2 + 12a - 40 = 0 \xrightarrow{\div 4} a^2 + 3a - 10 = 0$$

$$(a + 5)(a - 2) = 0 \rightarrow$$

$$a = -5, a = 2$$



ریشه‌های متضاد و قرینه باشند  $\alpha = -\frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = -1 \rightarrow P = -1$

ریشه‌ها قرینه باشند  $\alpha = -\beta \rightarrow \alpha + \beta = 0 \rightarrow S = 0$



تست ۱۴ به ازای کدام مقدار  $m$  ریشه‌های حقیقی معادله  $x(mx+5)+m^2=6$  معکوس یکدیگرند؟

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \xrightarrow{2 \text{ (4)}} \alpha\beta = 1 \xrightarrow{3 \text{ (3)}} P = 1 \xrightarrow{-3 \text{ (2)}} \frac{c}{a} = 1 \xrightarrow{-2 \text{ (1)}} \frac{m^2 - 7}{m} = 1 \rightarrow m^2 - m - 7 = 0$$

$$mx^2 + 5x + m^2 - 7 = 0$$

$$(m-4)(m+1) = 0 \rightarrow$$

$$m = 4, m = -1$$

همواره بعد از به دست آوردن پارامتر در معادله دوم باید  $\Delta$  اطمینان شود که منفی نباشد.

$$m = 4 \rightarrow 4x^2 + 5x + 3 = 0 \quad \Delta = 25 - 48 < 0$$

$$m = -1 \checkmark$$



۱، ۵، ۲  
 $2(5) = 2 + 1$

هندسی ۱۲، ۶ و ۳  
 $6^2 = 3 \times 12$



تست ۱۵

اگر  $\sqrt{3}$  واسطه هندسی ریشه‌های معادله  $mx^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$  باشد، مجموع ریشه‌های این معادله

(سراسری انسانی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

کدام است؟

\* اگر  $a, b, c$  سه عدد متوالی یک دنباله حسابی باشند،  $b$  را واسطه حسابی می‌گویند و داریم:  $b = \frac{a+c}{2}$   
 \* اگر  $a, b, c$  سه عدد متوالی یک دنباله هندسی باشند،  $b$  را واسطه هندسی می‌گویند و داریم:  $b^2 = ac$

$mx^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$   $\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$   $(\sqrt{3})^2 = \alpha\beta \rightarrow \alpha\beta = 3 \rightarrow P = 3$   
 $\frac{m^2 - 4}{m} = 3 \rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \rightarrow m = -1$   
 $m = -1 \rightarrow -x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow S = -4$   
 غلط  $m = 4$   
 $4x^2 - 4x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Delta < 0$



گست ۱۶ اگر مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - mx = 4x + m$ ، پنج برابر مجموع ریشه‌های این معادله باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

$$\alpha = \frac{m+4}{2}$$

$$\beta = -\frac{m}{2}$$

$$2x^2 - x(m+4) - m = 0$$

۴ و -۶

۳ و -۶

۴

۱ و -۶

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) \rightarrow \frac{(m+4)^2}{4} - x\left(-\frac{m}{x}\right) = 5\left(\frac{m+4}{2}\right) \xrightarrow{\times 4}$$

$$m^2 + 8m + 16 + 4m = 10m + 20 \rightarrow$$

$$m^2 + 2m - 4 = 0 \rightarrow (m+7)(m-6) = 0$$

$$m = -7 \rightarrow 2x^2 + 2x + 7 = 0 \rightarrow x^2 + x + \frac{7}{2} = 0$$

$$m = 6 \checkmark \quad \Delta < 0$$



اگر در معادله‌ی درجه دوم پارامتری رابطه‌ای نامتقارن بین ریشه‌ها داده شود بدیهی است که نمی‌توانیم آن رابطه را مستقیماً بر حسب روابط  $S$  و  $P$  بنویسیم در این حالت باید آن رابطه را به همراه  $S$  و  $P$  در یک دستگاه نوشته و با تعیین ریشه‌ها پارامتر را به دست می‌آوریم. به تست‌های زیر دقت کنید:



قسط ۱۷ رابطه  $2x_1 - 3x_2 = 16$  بین ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  از معادله درجه دوم  $x^2 - 3x = 2m - 1$  برقرار است،

(سنجش ریاضی ۱۴۰۲)

حاصل  $x_1^3 + x_2^3 + 30m$  کدام است؟

۲۹۸ ۴

۲۸۲ ۳

۲۹۰ ۲

۲۲۸ ۱



به ازای دو مقدار  $a$ ، یک ریشه معادله  $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو **قست ۱۸**

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

مقدار  $a$  کدام است؟

۱۸  ۴

۱۶  ۳

۹  ۲

۸  ۱

بدیهی است ریشه هر معادله‌ای در آن معادله صدق می‌کند. گاهی اوقات در تست‌هایی که رابطه‌ای نامتقارن بین ریشه‌ها داده می‌شود، می‌توان با صدق دادن ریشه در معادله، حاصل آن را رابطه را بدست آورد. به تست‌های زیر دقت کنید:



اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 5 = 0$  باشند، حاصل  $(x'^2 - 5)^2 + 4x''^2$  کدام است؟ **تست ۱۹**

۲۴ **۴**

۳۶ **۳**

۴۸ **۲**

۵۶ **۱**



اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 1 = 0$  باشند، حاصل  $\frac{1}{\beta^2 - 3\beta + 1} + \frac{1}{\alpha + 2}$  کدام است؟ **نست ۲۰**

$$\frac{9}{7} \text{ (۴)}$$

$$\frac{8}{7} \text{ (۳)}$$

$$\frac{8}{11} \text{ (۲)}$$

$$\frac{7}{11} \text{ (۱)}$$



اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $3x^2 - 12x - a = 0$  و  $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$  باشد، مقدار  $a$  چند برابر ریشه **قست ۲۱**

بزرگتر معادله است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲ فارغ - نوبت دوم)

۴ -۹

۳ ۹

۲ -۳

۱ ۳



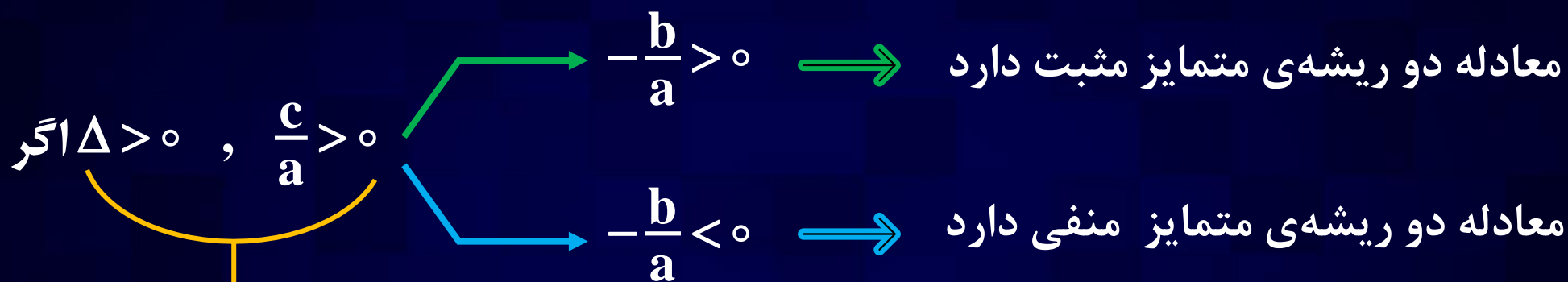
## بررسی علامت ریشه‌ها در معادله‌ی درجه دوم

برای بحث بر روی علامت ریشه‌ها ابتدا  $\frac{c}{a}$  معادله را تشکیل می‌دهیم:

۱ اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، حتماً  $\Delta > 0$  است و نیازی به تشکیل دادن آن نیست و در این حالت معادله‌ی دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.



۲ اگر  $\frac{c}{a} > 0$  باشد،  $\Delta$  را تشکیل می‌دهیم در صورتی که  $\Delta > 0$  باشد داریم:



معادله‌ی دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد.

اگر  $\Delta = 0$  باشد معادله **ریشه‌ی مضاعف** دارد در صورتی که  $-\frac{b}{2a} > 0$  ریشه‌ی مضاعف مثبت و در صورتی که  $-\frac{b}{2a} < 0$  ریشه‌ی مضاعف منفی خواهد بود.



تست ۲۲ به ازای کدام مقادیر  $m$  معادله درجه دوم  $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$  دارای دو ریشه

(سراسری تجربی ۹۷)

حقیقی منفی است؟

$3 < m < 6$  ۴

$0 < m < 3$  ۳

$m > 3$  ۲

$m < -6$  ۱



تست ۲۳ اگر  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $(k+3)x^2 + 2kx + 4(k-1) = 0$  باشند و  $x_1 < 0 < x_2$  و  $|x_1| > x_2$

برای  $k$  چند مقدار صحیح وجود دارد؟

۱ صفر

۲ ۳

۳ ۵

۴ بیشمار



## تشکیل معادله‌ی درجه دوم با معلوم بودن ریشه‌ها

اگر ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم را داشته باشیم ریشه‌ها را یک‌بار با هم جمع و یک‌بار در هم ضرب می‌کنیم. ( $S$  و  $P$  را به دست می‌آوریم.) سپس معادله را به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  تشکیل می‌دهیم.



سؤال ۲۴ در مستطیلی به مساحت  $\frac{6}{5}$  و محیط  $\frac{10}{5}$ ، اختلاف اندازه طول و عرض کدام است؟

۴  $\frac{1}{75}$

۳  $\frac{1}{5}$

۲  $\frac{1}{25}$

۱ ۱



## تشکیل معادله‌ی جدید با استفاده از معادله‌ی مفروض

برای تشکیل معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش رابطه‌ی معینی با ریشه‌های معادله‌ی  $ax^2 + bx + c = 0$  داشته باشد. ریشه‌های معادله‌ی مفروض را  $\alpha$  و  $\beta$  فرض می‌کنیم و ریشه‌های معادله‌ی جدید را برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  می‌نویسیم. سپس ریشه‌های معادله‌ی جدید را یک‌بار با هم جمع و یک‌بار در هم ضرب می‌کنیم تا  $S$  و  $P$  معادله‌ی جدید به دست آید. سپس معادله‌ی جدید را به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  تشکیل می‌دهیم.



**مثال ۲۵** معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌هایش از ۲ برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  یک واحد

بیشتر باشد، کدام است؟





قست ۲۶ فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x = x^2 - 4$  باشند. ریشه‌های کدام معادله

(سراسری تجربی ۱۴۰۰ - فارغ)

است؟  $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ ,  $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$

$4x^2 + 51x = 197$  ۴

$4x^2 = 51x + 197$  ۳

$4x^2 + 51x = 221$  ۲

$4x^2 = 51x + 221$  ۱



جواب‌های معادله  $2x^2 + (a-1)x + b = 0$  از مربع جواب‌های معادله  $x^2 - 2x - 4 = 0$  یک واحد کمتر

قسط ۲۷

است. حاصل  $a+b$  کدام است؟

۳۱ ۴

۱۵ ۳

-۱۳ ۲

-۹ ۱



ریشه‌های معادله  $2x^2 - ax + b = 0$  نیم‌واحد از ریشه‌های معادله  $2ax^2 + ax - 6 = 0$  بیشتر است. **گزینه ۲۸**

مقدار  $\left[\frac{ab}{4}\right]$  کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

۴ -۱

۳ -۲

۲ -۳

۱ -۴



## معادله‌ی دوم‌جذوری $ax^2 + bx + c = 0$

برای حل این معادله از تغییر متغیر  $x^2 = t$  استفاده می‌کنیم. معادله به صورت  $at^2 + bt + c = 0$  در خواهد آمد که قابل حل و بحث است.



مثال ۲۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف  $۳x^۴ - ۷x^۲ + ۴ = ۰$

ب  $۲x^۴ - ۳x^۲ = ۱۴$

بدیهی است در معادله دو مجذوری به ازای هر  $t$  مثبت دو جواب قرینه برای  $x$  بدست می آید پس داریم:

دو تا  $t$  مختلف‌العلامت، برای  $x$  دو ریشه داریم.

دو تا  $t$  مثبت، برای  $x$  چهار ریشه داریم.

$t$  مضاعف مثبت، برای  $x$  دو ریشه داریم.

دو تا  $t$  منفی، برای  $x$  ریشه نخواهیم داشت.

$t$  نداشته باشیم،  $x$  هم نخواهیم داشت.

$t$  مضاعف منفی، برای  $x$  ریشه نخواهیم داشت.



مثال ۳۰ هر یک از معادلات زیر چند ریشه دارند؟

الف  $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$

ب  $3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$



مثال ۳۰ هر یک از معادلات زیر چند ریشه دارند؟

ج  $\Delta x^4 - (m+1)x^2 - m^2 - 2 = 0$ .





قسط ۳۱ به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، معادله  $x^4 - 2(m-2)x^2 + 14 = m$  دارای چهار ریشه حقیقی متمایز است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



تست ۳۲ اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$  به ترتیب S و P باشند. حاصل

عبارت  $2P^2 - 3SP + 2S$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

$59 + 7\sqrt{69}$  ۴

۵۰ ۳

$7 + \sqrt{69}$  ۲

$59 - 7\sqrt{69}$  ۱

به طور کلی برای حل تمامی معادلات به صورت  $ax^{2k} + bx^k + c = 0$  از تغییر متغیر  $x^k = t$  استفاده می‌کنیم.  
ضمناً اگر در معادله قسمت مشترکی بین جملات ببینیم، آن قسمت مشترک را  $t$  در نظر گرفته و معادله را حل می‌کنیم.



مثال ۳۳ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف  $x^2 + \frac{8}{x^4} = \frac{9}{x}$

ب  $\sqrt{x} - \frac{x}{2} = 1$



مثال ۳۳ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

ج  $(x^2 - 3x)^2 - 2x^2 + 6x - 8 = 0$



تست ۳۴ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $(3x^2 + 2x + 1)^2 - 14x = 15 + 21x^2$  کدام است؟

$$-\frac{7}{3} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{4}{3} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{14}{9} \quad \text{۱}$$



تست ۳۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  معادله  $x + m\sqrt{x} + \frac{3-2m}{4} = 0$  فقط یک جواب دارد؟

$m > \frac{3}{2} \cup \{1\}$  ۴

$m \geq \frac{3}{2} \cup \{1\}$  ۳

$m > \frac{3}{2}$  ۲

$m \geq \frac{3}{2}$  ۱



## حل معادله درجه سوم

فرم کلی یک معادله درجه سوم به صورت  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  می باشد که در آن  $a \neq 0$  است. گاهی اوقات می توان معادله درجه سوم را با استفاده از فاکتورگیری و یا تجزیه حل نمود.

مثال :  $2x^3 - 5x^2 - 7x = 0$ .

مثال :  $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ .





اگر معادله درجه سوم با استفاده از تجزیه حل نشود، باید با امتحان کردن اعداد  $\pm 1$  و  $\pm 2$  و ... یکی از ریشه‌ها را تعیین کنیم. اگر فرض کنیم یک ریشه معادله  $\alpha$  باشد، پس عامل  $x - \alpha$  در معادله وجود دارد. در این صورت معادله درجه سوم را بر  $x - \alpha$  تقسیم کرده و خارج قسمت را تعیین می‌نماییم و با صفر قرار دادن خارج قسمت ریشه‌های دیگر را به دست می‌آوریم.

**مثال:**  $2x^3 - 4x^2 - 11x + 10 = 0$



تست ۳۶ اگر یکی از ریشه‌های معادله  $x(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{3}{2} \quad \text{۲}$$

$$-۲ \quad \text{۱}$$