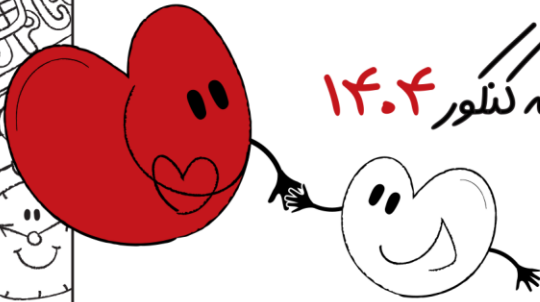


با ❤️ بیا تام لند

جزوه
دوره سالانه نئور ۱۴۰۴



ریاضی تجربی

جزوه شماره ۱
معادلات و نامعادلات

مهندس افشین ملاکپور

 afshinmallakpour  afshin_mallakpour

معادلات و نامعادلات

۱

- ۱ حل معادله درجه دوم و بحث بر روی تعداد ریشه‌ها
- ۲ روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه دوم
- ۳ بررسی علامت ریشه‌ها در معادله درجه دوم
- ۴ تشکیل معادله درجه دوم جدید با استفاده از معادله مفروض
- ۵ حل معادله دوم‌جذوری و معادلاتی که قابل تبدیل به درجه ۲ هستند
- ۶ حل معادله درجه سوم
- ۷ تابع درجه دوم (سهمی) و نکات مربوط به آن
- ۸ بررسی وضعیت دو منحنی نسبت به یکدیگر
- ۹ معادلات گویا و رادیکالی
- ۱۰ تعیین علامت و روش حل نامعادلات

ریاضی ۱ و ۲

معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (سهمی)

ریاضی ۲

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

ریاضی ۱ و ۲

تعیین علامت و حل نامعادلات

◆ معادله درجه دوم

فرم کلی یک معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می باشد که در آن $a \neq 0$ است. ولی b یا c یا هر دو می توانند صفر باشند که در این صورت معادله درجه دوم را **ناقص** می نامیم. روش حل معادله درجه دوم در حالت‌های ناقص را با ذکر مثال نشان می دهیم.

$$① \quad 3x^2 - 7x = 0 \rightarrow x(3x - 7) = 0 \rightarrow x' = 0 \quad \text{یا} \quad 3x - 7 = 0 \rightarrow x'' = \frac{7}{3}$$

پس در حالتی که $c = 0$ باشد یکی از ریشه‌های معادله صفر خواهد بود.

$$② \quad 4x^2 - 5 = 0 \rightarrow 4x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$3x^2 + 4 = 0 \rightarrow 3x^2 = -4 \rightarrow x^2 = -\frac{4}{3} \quad \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

پس در حالتی که $b = 0$ باشد، اگر a و c مختلف‌العلامت باشند معادله دو ریشه قرینه حقیقی دارد و اگر a و c هم علامت باشند معادله ریشه حقیقی نخواهد داشت.

$$③ \quad 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x' = x'' = 0$$

پس در حالتی که $b, c = 0$ باشد معادله ریشه مضاعف صفر خواهد داشت.



تست ۱ به ازای کدام مقدار m ، معادله درجه دوم $(m+1)x^2 - (m^2 - 4)x + 2m^2 + m - 10 = 0$ دو ریشه قرینه حقیقی دارد؟

- ۱ ± 2 ۲ فقط ۲ ۳ فقط -۲ ۴ \emptyset

حالت‌های خاص در حل معادله درجه دوم

۱ اگر $a+b+c=0 \rightarrow x'=1, x''=\frac{c}{a}$

مثال: $2x^2 + 7x - 9 = 0 \rightarrow x'=1, x''=-\frac{9}{2}$

۲ اگر $a+c=b \rightarrow x'=-1, x''=-\frac{c}{a}$

مثال: $3x^2 - 7x - 10 = 0 \rightarrow x'=-1, x''=\frac{10}{3}$

مثال ۲ ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

الف $2x^2 - (\sqrt{5} - 2)x - \sqrt{5} = 0$

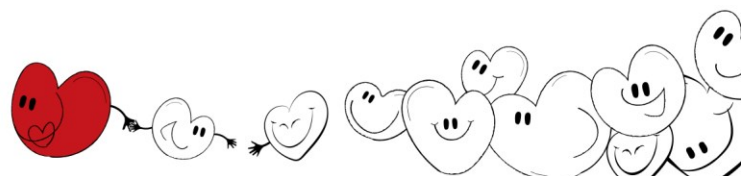
ب $(\sqrt{3} - 1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3} + 1) = 0$

ج $ax^2 - 2x - (a + 2) = 0$

روش تجزیه در حل معادله درجه دوم

اگر ضریب x^2 ، ۱ باشد گاهی اوقات می‌توان معادله را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه نمود و آن را حل کرد.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



مثال ۳ ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

الف $x^2 - 10x + 21 = 0$

ب $x^2 - 4x - 12 = 0$

ج $2x^2 - 5x - 12 = 0$

د $3x^2 + 7x + 2 = 0$

حل معادله درجه دوم در حالت کلی و بحث بر روی تعداد ریشه‌ها

$$x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

اگر b را بتوان بر ۲ تقسیم نمود نصف آن را b' می‌نامیم ($b' = \frac{b}{2}$) و ریشه‌ها را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$x', x'' = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

مثال: $3x^2 - 24x + 12 = 0$

۱ $\Delta' > 0$ یا $\Delta > 0$ اگر \rightarrow

معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

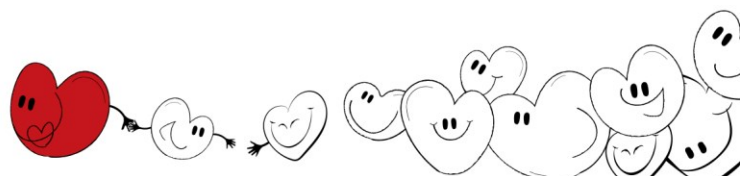
۲ $\Delta' = 0$ یا $\Delta = 0$ اگر \rightarrow

معادله دو ریشه حقیقی مساوی (یک ریشه مضاعف) دارد.

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

۳ $\Delta' < 0$ یا $\Delta < 0$ اگر \rightarrow

معادله ریشه حقیقی ندارد.



تست ۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه

(سراسری ریاضی ۹۸)

حقیقی متمایز است؟ $(m \neq \frac{1}{4})$

- ۱ $-2 < m < 2/5$ ۲ $-2 < m < 3/5$ ۳ $-1 < m < 3/5$ ۴ $-1 < m < 2/5$

تست ۵ ریشه مضاعف معادله $ax^2 + 2(a-4)x + 2 = 0$ کدام می تواند باشد؟

- ۱ -1 ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ 2 ۴ $\frac{1}{2}$

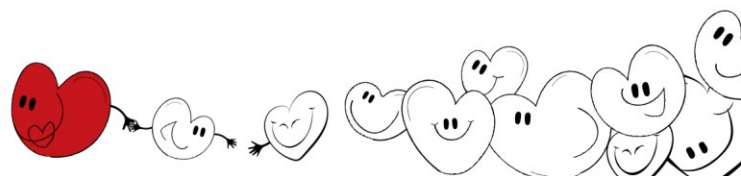
تست ۶ اگر $x = -3$ ریشه مضاعف معادله $2x^2 + (a-1)x - 3b = 0$ باشد، $a-b$ کدام است؟

- ۱ 10 ۲ -7 ۳ 7 ۴ 19

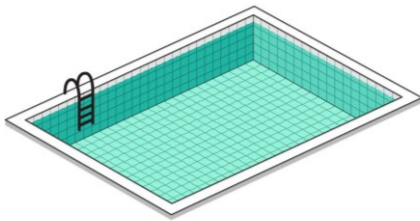
تست ۷ یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع

قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، محیط قاب عکس چند سانتی متر است؟ (تمرین کتاب درسی)

- ۱ 35 ۲ 70 ۳ 120 ۴ 140



تست ۸ استخری مستطیل شکل به ابعاد ۶ و ۱۸ متر دارای یک آبراه بتونی در اطرافش می باشد. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۸۱ مترمربع باشد، پهنای آبراه چند سانتی متر است؟



- ۱۰۰ ۱
۱۵۰ ۲
۲۵۰ ۴
۲۰۰ ۳

تست ۹ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن گاه حاصل ضرب پول های باقی مانده آنها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم کدام است؟
(سراسری تجربی ۱۴۰۰ - فارغ)

- ۹ ۱
۱۵ ۲
۸۵ ۳
۹۱ ۴

تست ۱۰ دو سال پیش سن مریم ۷ برابر سن برادرش بوده است. اکنون سن مریم مربع سن برادرش است. مجموع سن مریم و برادرش در حال حاضر کدام می تواند باشد؟

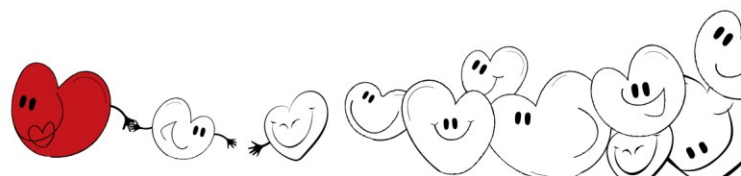
- ۲۰ ۱
۱۸ ۲
۱۶ ۳
۳۰ ۴

رابطه بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم

۱ $x' + x'' =$ مجموع ریشه ها

۲ $x' \cdot x'' =$ حاصل ضرب ریشه ها

۳ $|x' - x''| =$ قدرمطلق تفاضل ریشه ها



تذکر اگر در رابطه بین ریشه‌ها جای x' و x'' را عوض کنیم و رابطه تغییر نکند به آن رابطه، متقارن گفته می‌شود. هر رابطه‌ای که بر حسب x' و x'' متقارن باشد را می‌توانیم با عملیات ریاضی مثل مخرج مشترک گرفتن، اتحادها و تجزیه، فاکتورگیری، به توان رساندن، بر حسب ۳ رابطه فوق نوشت.

از بین روابط متقارن بر حسب ریشه‌ها حفظ بودن ۴ مورد زیر ضروری است:

۴ مجموع معکوسات ریشه‌ها: $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} =$

۵ مجموع مربعات ریشه‌ها: $x'^2 + x''2 =$

۶ مجموع مکعبات ریشه‌ها: $x'^3 + x''3 =$

۷ مجموع جذر ریشه‌ها: $\sqrt{x'} + \sqrt{x''} =$

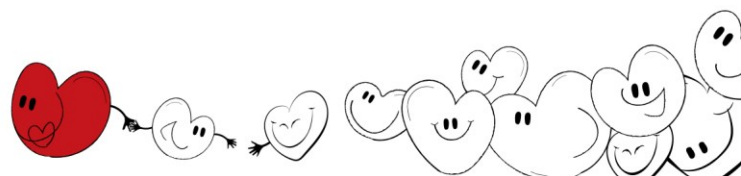
مثال ۱۱ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند مطلوب است حاصل عبارات زیر:

الف $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$

ب $\alpha^4\beta + \beta^4\alpha =$

ج $\alpha^4 + \beta^4 =$

د $|\alpha^2 - \beta^2| =$



۵ $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} =$

نکته اگر در معادله درجه دوم پارامتری، رابطه‌ای متقارن بین ریشه‌ها داده شده باشد، می‌توان آن رابطه را بر حسب روابط S و P نوشت و از آن‌جا پارامتر را به دست آوریم.

تست ۱۲ به ازای کدام مقدار k مجموع معکوسات ریشه‌های معادله درجه دوم $kx + 3 = (2x - 1)^2$ برابر $\frac{3}{4}$ است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) -۷

تست ۱۳ به ازای کدام مقدار a یک ریشه معادله $x^2 + 2ax + 1 - 3a = 0$ از ریشه دیگر آن ۶ واحد بیشتر است؟

- ۱) ۵ و ۲ ۲) ۲ و -۵ ۳) ۲ و -۵ ۴) -۲ و -۵

تست ۱۴ به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $x(mx + 5) + m^2 = 6$ معکوس یکدیگرند؟

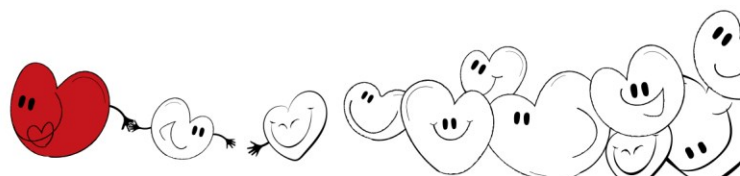
- ۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۲

تست ۱۵ اگر $\sqrt{3}$ واسطه هندسی ریشه‌های معادله $mx^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$ باشد، مجموع ریشه‌های این معادله

(سراسری انسانی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴



تست ۱۶ اگر مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - mx = 4x + m$ ، پنج برابر مجموع ریشه‌های این معادله باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱ -۶ ۲ ۴ ۳ -۴ و ۶ ۴ ۴ و -۶

نکته اگر در معادله درجه دوم پارامتری رابطه‌ای نامتقارن بین ریشه‌ها داده شود بدیهی است که نمی‌توانیم آن رابطه را مستقیماً برحسب روابط S و P بنویسیم. در این حالت باید آن رابطه را به همراه S و P در یک دستگاه نوشته و با تعیین ریشه‌ها پارامتر را به دست می‌آوریم. به تست‌های زیر دقت کنید:

تست ۱۷ رابطه $2x_1 - 3x_2 = 16$ بین ریشه‌های x_1 و x_2 از معادله درجه دوم $x^2 - 3x = 2m - 1$ برقرار است، حاصل $x_1^3 + x_2^3 + 30m$ کدام است؟

(سنجش ریاضی ۱۴۰۲)

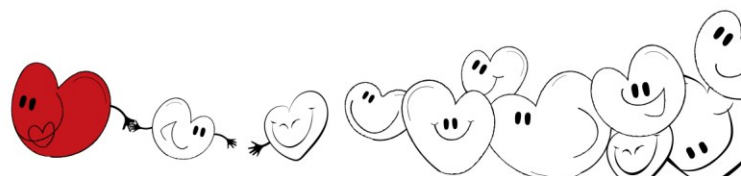
- ۱ ۲۲۸ ۲ ۲۹۰ ۳ ۲۸۲ ۴ ۲۹۸

تست ۱۸ به‌ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

- ۱ ۸ ۲ ۹ ۳ ۱۶ ۴ ۱۸

نکته بدیهی است ریشه هر معادله‌ای در آن معادله صدق می‌کند. گاهی اوقات در تست‌هایی که رابطه‌ای نامتقارن بین ریشه‌ها داده می‌شود، می‌توان با صدق دادن ریشه در معادله، حاصل آن را رابطه را بدست آورد. به تست‌های زیر دقت کنید:



تست ۱۹ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $(x'^2 - 5)^2 + 4x''^2$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۳۶ (۳)

۴۸ (۲)

۵۶ (۱)

تست ۲۰ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\beta^2 - 3\beta + 1} + \frac{1}{\alpha + 2}$ کدام است؟

$\frac{9}{7}$ (۴)

$\frac{8}{7}$ (۳)

$\frac{8}{11}$ (۲)

$\frac{7}{11}$ (۱)

تست ۲۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگتر معادله است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲ فارغ - نوبت دوم)

-۹ (۴)

۹ (۳)

-۳ (۲)

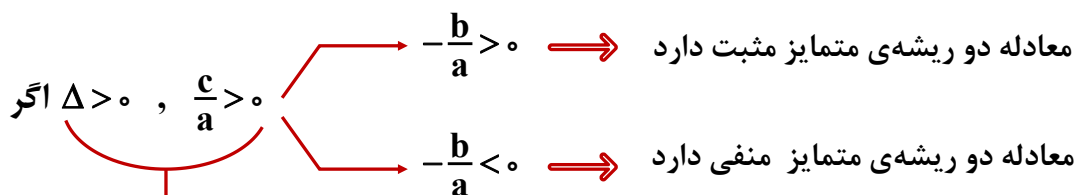
۳ (۱)

بررسی علامت ریشه‌ها در معادله درجه دوم

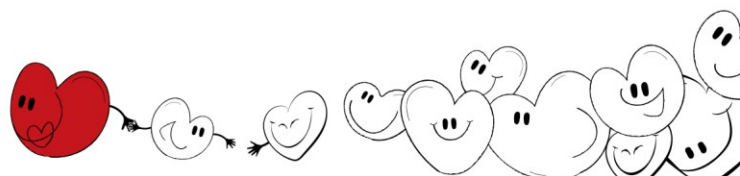
برای بحث بر روی علامت ریشه‌ها ابتدا $\frac{c}{a}$ معادله را تشکیل می‌دهیم:

۱ اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، حتماً $\Delta > 0$ است و نیازی به تشکیل دادن آن نیست و در این حالت معادله دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

۲ اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد، Δ را تشکیل می‌دهیم در صورتی که $\Delta > 0$ باشد داریم:



معادله‌ی دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد.



تذکر اگر $\Delta = 0$ باشد معادله ریشه مضاعف دارد، در صورتی که $-\frac{b}{2a} > 0$ ، ریشه مضاعف مثبت و در صورتی که $-\frac{b}{2a} < 0$ ، ریشه مضاعف منفی خواهد بود.

تست ۲۲ به ازای کدام مقادیر m معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه

(سراسری تجربی ۹۷)

حقیقی منفی است؟

- ۱ $m < -6$ ۲ $m > 3$ ۳ $0 < m < 3$ ۴ $3 < m < 6$

تست ۲۳ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(k+3)x^2 + 2kx + 4(k-1) = 0$ باشند و $x_1 < 0 < x_2$ و $|x_1| > x_2$

برای k چند مقدار صحیح وجود دارد؟

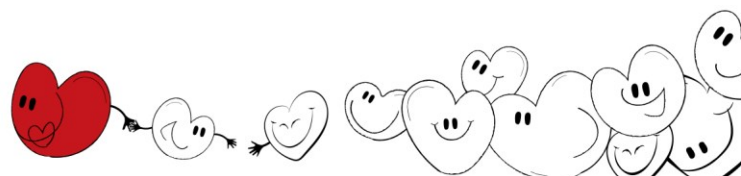
- ۱ صفر ۲ ۳ ۳ ۵ ۴ بیشمار

تشکیل معادله درجه دوم با معلوم بودن ریشه‌ها

اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم را داشته باشیم ریشه‌ها را یک‌بار با هم جمع و یک‌بار در هم ضرب می‌کنیم. (S) و P را به دست می‌آوریم. سپس معادله را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم.

تست ۲۴ در مستطیلی به مساحت $\frac{6}{5}$ و محیط $\frac{10}{5}$ ، اختلاف اندازه طول و عرض کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ $\frac{1}{25}$ ۳ $\frac{1}{5}$ ۴ $\frac{1}{75}$



تشکیل معادله جدید با استفاده از معادله مفروض

برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌هایش رابطه معینی با ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشد. ریشه‌های معادله مفروض را α و β فرض می‌کنیم و ریشه‌های معادله جدید را برحسب α و β می‌نویسیم. سپس ریشه‌های معادله جدید را یک‌بار با هم جمع و یک‌بار در هم ضرب می‌کنیم تا S و P معادله جدید به دست آید. سپس معادله جدید را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم.

مثال ۲۵ معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌هایش از ۲ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر باشد، کدام است؟

تست ۲۶ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = x^2 - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1^3 + \frac{1}{x_2^3}$ است؟
(سراسری تجربی ۱۴۰۰ - فارغ)

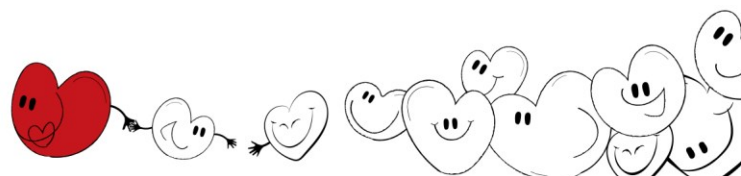
- ۱ $4x^2 = 51x + 221$ ۲ $4x^2 + 51x = 221$ ۳ $4x^2 = 51x + 197$ ۴ $4x^2 + 51x = 197$

تست ۲۷ جواب‌های معادله $ax^2 + (a-1)x + b = 0$ از مربع جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ یک واحد کمتر است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱ -۹ ۲ -۱۳ ۳ ۱۵ ۴ ۳۱

تست ۲۸ ریشه‌های معادله $ax^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟
(سراسری تجربی ۱۴۰۲ - نوبت دوم)

- ۱ -۴ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ -۱



معادله دومجذوری $ax^2 + bx^2 + c = 0$

برای حل این معادله از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده می‌کنیم. معادله به صورت $at^2 + bt + c = 0$ در خواهد آمد که قابل حل و بحث است.

مثال ۲۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف $3x^4 - 7x^2 + 4 = 0$

ب $2x^4 - 3x^2 = 14$

نکته بدیهی است در معادله دو مجذوری به ازای هر t مثبت دو جواب قرینه برای x بدست می‌آید پس داریم:

دو تا t مثبت، برای x چهار ریشه داریم. دو تا t مختلف‌العلامت، برای x دو ریشه داریم.

دو تا t منفی، برای x ریشه نخواهیم داشت. مضاعف مثبت، برای x دو ریشه داریم.

t مضاعف منفی، برای x ریشه نخواهیم داشت. t نداشته باشیم، x هم نخواهیم داشت.

مثال ۳۰ هریک از معادلات زیر چند ریشه دارند؟

الف $2x^4 + 7x^2 + 1 = 0$

ب $3x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

ج $5x^4 - (m+1)x^2 - m^2 - 2 = 0$

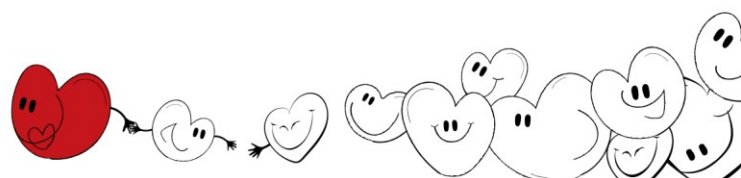
تست ۳۱ به ازای چند مقدار صحیح m ، معادله $x^4 - 2(m-2)x^2 + 14 = m$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز است؟

۱۲ **۴**

۱۱ **۳**

۸ **۲**

۷ **۱**



تست ۳۲ اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^6 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند. حاصل

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

عبارت $2P^2 - 3SP + 2S$ کدام است؟

۴ $59 + 7\sqrt{69}$

۳ ۵۰

۲ $7 + \sqrt{69}$

۱ $59 - 7\sqrt{69}$

نکته به‌طور کلی برای حل تمامی معادلات به‌صورت $ax^{2k} + bx^k + c = 0$ از تغییر متغیر $x^k = t$ استفاده می‌کنیم. ضمناً اگر در معادله قسمت مشترکی بین جملات ببینیم، آن قسمت مشترک را t در نظر گرفته و معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۳۳ هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف $x^2 + \frac{8}{x^4} = \frac{9}{x}$

ب $\sqrt{x} - \frac{x}{2} = 1$

ج $(x^2 - 3x)^2 - 2x^2 + 6x - 8 = 0$

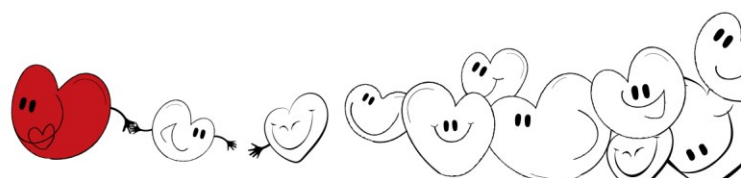
تست ۳۴ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $(3x^2 + 2x + 1)^2 - 14x = 15 + 21x^2$ کدام است؟

۴ $-\frac{7}{3}$

۳ $-\frac{2}{3}$

۲ $-\frac{4}{3}$

۱ $-\frac{14}{9}$



تست ۳۵ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله $x + m\sqrt{x} + \frac{3-2m}{4} = 0$ فقط یک جواب دارد؟

- ۱ $m \geq \frac{3}{4}$ ۲ $m > \frac{3}{4}$ ۳ $m \geq \frac{3}{4} \cup \{1\}$ ۴ $m > \frac{3}{4} \cup \{1\}$

حل معادله درجه سوم

فرم کلی یک معادله درجه سوم به صورت $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ می‌باشد که در آن $a \neq 0$ است. گاهی اوقات می‌توان معادله درجه سوم را با استفاده از فاکتورگیری و یا تجزیه حل نمود.

مثال: $2x^3 - 5x^2 - 7x = 0$

مثال: $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

اگر معادله درجه سوم با استفاده از تجزیه حل نشود، باید با امتحان کردن اعداد ± 1 و ± 2 و ... یکی از ریشه‌ها را تعیین کنیم. اگر فرض کنیم یک ریشه معادله α باشد، پس عامل $x - \alpha$ در معادله وجود دارد. در این صورت معادله درجه سوم را بر $x - \alpha$ تقسیم کرده و خارج قسمت را تعیین می‌نماییم و با صفر قرار دادن خارج قسمت ریشه‌های دیگر را به دست می‌آوریم.

مثال: $2x^3 - 4x^2 - 11x + 10 = 0$

تست ۳۶ اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ $-\frac{3}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

